Zkoušková písemka 9.6.2010 Jméno:

Praxe

1. V závislosti na parametrech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ nalezněte množinu všech řešení následující soustavy

$$\begin{array}{rcrcrcr} \alpha x & - & y & - & z & = & 1 \\ -x & - & y & - & z & = & 1 \\ x & + & \alpha y & + & \beta z & = & -\alpha \end{array}$$

   [4 body]

2. Nechť n je sudé číslo, m je liché číslo, $n, m \in \mathbb{N}$. Spočtěte determinant matice $\mathbb{A}$ typu $(n+m) \times (n+m)$ a najděte $\mathbb{A}^{-1}$, kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \mathbf{n} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{n-1} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \mathbf{2} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \mathbf{m} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \mathbf{m-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \mathbf{2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \mathbf{1} & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Nevíte-li si rady obecně, spočtěte úlohu pro $n = 2$ a $m = 3$.

   [4 body]

3. Je matice $\mathbb{A}$ diagonalizovatelná? Pokud ano, najdětě matice $\mathbb{X}$ a $\mathbb{D}$, kde $\mathbb{D}$ je diagonální a $\mathbb{X}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{D}$. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

   [4 body]

4. Nechť $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, kde $P = [\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda$. Najděte ortogonální průmět $\vec{x}$ do P, tj. $\vec{x}_P$, pokud

   (a) $\mathbb{R}^4$ je vybaven standardním skalárním součinem,

   (b) $\mathbb{R}^4$ je vybaven $\mathbb{A}$-skalárním součinem, kde $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   [4 body]

5. Nechť W_1, W_2, W_3 jsou lineární variety v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ zadané následovně:

$$W_1 = [\begin{pmatrix}2\\2\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}]_\alpha, \qquad W_2 \equiv \begin{array}{ccccccccccc} x & = & 1 & + & t & + & s & + & 2r & + & 3q \\ y & = & & & t & & & + & r & + & q \\ z & = & 1 & + & t & + & s & + & 2r & + & 3q \\ u & = & & & t & & & + & r & + & q \end{array},$$

$$W_3 \equiv x - y = 0$$

Určete, o jaké lineární variety se jedná. Najděte zaměření W_3. Najděte vzájemnou polohu W_1 a W_3 a průnik $W_2 \cap W_3$.

[4 body]

Teorie

1. (a) Definujte ortogonální matici.
   (b) Uveďte příklad OG matice různé od jednotkové.
   (c) Co víte o vlastních číslech OG matice? Tvrzení dokažte.
   (d) Definujte normální matici.
   (e) Co víte o vlastních vektorech normálních matic a jejich diagonalizaci?
   (f) Doplňte správně větu: Nechť $\mathbb{A}$ je čtvercová matice řádu n s komplexními prvky. V $\mathbb{C}^n$ existuje ortonormální báze z vlastních vektorů matice $\mathbb{A}$ tehdy a jen tehdy, když...

   [3 body]

2. (a) Definujte spojnici bodů a lineární varietu v $\mathbb{R}^n$.
   (b) Dokažte, že je-li $P \subset\subset \mathbb{R}^n$ a $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, pak $\vec{a} + P$ je lineární varieta.
   (c) Vyslovte větu, která říká, že každá lineární varieta je posunutý vektorový podprostor.
   (d) Jaké všechny typy lineárních variet v $\mathbb{R}^3$ znáte? (nápověda: 4)

   [3 body]

3. (a) Vyslovte větu známou jako trojúhelníková nerovnost, včetně popisu případu, kdy nastává rovnost.
   (b) Vyslovte větu známou jako rovnoběžníková rovnost.
   (c) Nechť $P \subset\subset V$, kde V je vekt. pr. se skalárním součinem. Definujte OG doplněk P.
   (d) Vysvětlete, co znamená $V = P \oplus P^\perp$.

   [3 body]

Hodnocení

1. Kdo získá $13 - 14$ bodů (z 20 možných) z praktické části a z žádného příkladu ani žádné otázky nebude mít 0 bodů a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.

2. Kdo získá $15 - 16$ bodů z praktické části a z žádného příkladu ani žádné otázky nebude mít 0 bodů a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.

3. Kdo získá $17 - 18$ bodů z praktické části a z žádného příkladu nebude mít 0 bodů a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.

4. Kdo získá $19 - 20$ bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.