Zkoušková písemka 8.9.2010 Jméno:

Praxe

1. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ nalezněte množinu všech řešení následující soustavy

$$\begin{array}{rcrcrcr} \alpha x & - & y & + & z & = & 1 \\ -x & - & y & - & \alpha z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & -\alpha \end{array}$$

   [4 body]

2. Jsou dány matice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Najděte $\mathbb{B}\mathbb{A}^{-1}$ bez výpočtu $\mathbb{A}^{-1}$. Popište, jakým způsobem používáte Gaussovu eliminaci.

   (b) Určete $h(\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B})$.

   [4 body]

3. Je dána matice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Najděte její vlastní čísla a k nim příslušné LN vlastní vektory.

   [4 body]

4. Najděte OG bázi prostoru $\mathbb{R}^3$ obsahující vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   (a) použitím Gram-Schmidtova OG procesu (nápověda: ortogonalizujte např. bázi $(\vec{x}, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$),

   (b) jiným způsobem.

   [4 body]

5. Nechť W_1, W_2 jsou lineární variety v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ zadané následovně:

   W_1 je nejmenší lineární varieta obsahující vektory $\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $W_2 \equiv \begin{array}{rcrcrcr} x & = & 1 & + & t & - & 2s \\ y & = & 1 & + & t & - & s \\ z & = & 1 & + & t & - & s \\ u & = & 1 & + & t & - & s \end{array}$.

   Určete, o jaké lineární variety se jedná. Najděte jejich normálové rovnice. Najděte vzájemnou polohu W_1 a W_2 a průnik $W_1 \cap W_2$.

   [4 body]

Teorie

1. (a) Definujte vlastní čísla a vlastní vektory čtvercové matice s komplexními prvky.
   (b) Může být spektrum matice prázdné? Vysvětlete.
   (c) Nechť $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ jsou vlastní vektory matice $\mathbb{A}$ příslušné vlastnímu číslu λ. Z následujících vektorů vyberte ty, které jsou také vlastními vektory příslušnými λ. Výběr zdůvodněte.
      i. $\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$,
      ii. $3\vec{y}$,
      iii. $\mathbb{A}\vec{x}$.

   [3 body]

2. (a) Definujte hodnost matice a hodnost zobrazení.
   (b) Vyslovte větu, která hovoří o vztahu mezi hodností zobrazení a hodností matice.
   (c) Definujte regulární matici 4 různými způsoby (hodnost, determinant, vlastní čísla, řešení soustavy LAR).

   [3 body]

3. (a) Definujte inverzní matici.
   (b) Co musí matice splňovat, aby k ní existovala inverzní?
   (c) Umíte najít čtvercovou matici $\mathbb{A}$ tak, aby $\mathbb{A}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{I}$ a zároveň $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbb{A} \neq \mathbb{I}$. Pokud ano, najděte ji. Pokud ne, vysvětlete, proč neexistuje.

   [3 body]

   BONUS za 1 bod: Nechť matice $\mathbb{B}$ vznikne z $\mathbb{A}$ o 3 řádcích přehozením 2. a 3. řádku a následným vynásobením 2. řádku číslem 5. Jak vypadá čtvercová matice $\mathbb{T}$, která splňuje $\mathbb{B} = \mathbb{T}\mathbb{A}$.

Hodnocení

1. Kdo získá $13 - 14$ bodů (z 20 možných) z praktické části a z žádného příkladu ani žádné otázky nebude mít 0 bodů a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.

2. Kdo získá $15 - 16$ bodů z praktické části a z žádného příkladu ani žádné otázky nebude mít 0 bodů a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.

3. Kdo získá $17 - 18$ bodů z praktické části a z žádného příkladu nebude mít 0 bodů a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.

4. Kdo získá $19 - 20$ bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.