Zkoušková písemka 8.6.2010 Jméno:

Praxe

1. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ je definované pomocí matice ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \alpha & -\alpha \\ \alpha & -\alpha^2 \end{pmatrix}$, kde $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^2$. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$
   (a) najděte jádro A,
   (b) určete, zda A je prosté,
   (c) najděte obor hodnot $A(\mathbb{R}^2)$,
   (d) určete hodnost A.

   [4 body]

2. Jsou dány matice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 0.001 & 0.301 & 1.012 & 3.333 \\ 0 & 0 & 2.56 & 1000 \\ 0 & 0 & 0 & 3.56 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Najděte $\mathbb{A}^{-1}$ Gaussovou eliminací.
   (b) Určete $h(\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B})$.
   (c) Určete $[\mathbb{A}^{-1}]_{43}$ pomocí adjungované matice. Jaký vzorec používáte?

   [4 body]

3. Jsou dány matice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ a $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Najděte jejich vlastní čísla a k nim příslušné LN vlastní vektory.

   [4 body]

4. Najděte ON bázi $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, kde $P = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda$, pokud
   (a) $\mathbb{R}^4$ je vybaven standardním skalárním součinem,
   (b) $\mathbb{R}^4$ je vybaven $\mathbb{A}$-skalárním součinem s maticí $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   [4 body]

5. Nechť W_1 je nejmenší lineární varieta, která obsahuje vektory $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ a nechť $W_2 \equiv \begin{array}{rcrcrcrcl} & - & 2y & + & z & - & u & = & 1 \\ x & + & y & & & & & = & 0 \\ x & - & y & + & z & - & u & = & 1 \end{array}$.

   Určete, o jaké lineární variety se jedná. Najděte vzájemnou polohu a průnik W_1 a W_2.

   [4 body]

Teorie

1. (a) Definujte konvexní množinu a konvexní obal. Jaký je mezi nimi vztah?
   (b) Namalujte v $\mathbb{R}^2$ množinu, která není konvexní.
   (c) Jmenujte aspoň 3 různé konvexní množiny v $\mathbb{R}^3$.
   (d) Jak vypadá konvexní obal 3 lineárně nezávislých vektorů v $\mathbb{R}^3$?
   (e) Je W_2 z 5. příkladu konvexní množinou? Vysvětlete.

   [3 body]

2. (a) Definujte úhel mezi vektory v $\mathbb{R}^4$.
   (b) Jaký úhel (stačí, zda tupý, ostrý, pravý, přímý nebo nulový) mezi sebou svírají generátory prostoru P ze 4. příkladu? Uvažujte všechny možné dvojice.
   (c) Může se stát, že by ortonormální soubor vektorů byl lineárně závislý? Pokud ano, najděte příklad takového souboru. Pokud ne, tvrzení dokažte.

   [3 body]

3. (a) Definujte regulární matici.
   (b) Uveďte ještě aspoň tři další ekvivalentní definice regularity, tj. dokončete třemi různými způsoby tvrzení: Nechť $\mathbb{A}$ je čtvercová matice řádu n. Pak $\mathbb{A}$ je regulární tehdy a jen tehdy, když ...
   (c) Jak spočtete determinant matice, znáte-li její vlastní čísla?
   (d) BONUS: Jak spočtete pomocí determinantu obsah rovnoběžníku s vrcholy

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ a } \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

   [3 body]

Hodnocení

1. Kdo získá 13 – 14 bodů (z 20 možných) z praktické části a z žádného příkladu ani žádné otázky nebude mít 0 bodů a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.

2. Kdo získá 15 – 16 bodů z praktické části a z žádného příkladu ani žádné otázky nebude mít 0 bodů a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.

3. Kdo získá 17 – 18 bodů z praktické části a z žádného příkladu nebude mít 0 bodů a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.

4. Kdo získá 19 – 20 bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.