Zkoušková písemka 6.9.2010 Jméno:

Praxe

1. V závislosti na parametru $\beta \in \mathbb{R}$ nalezněte množinu všech řešení v $\mathbb{R}^4$ následující soustavy
$$\beta \cdot x \quad - \quad (\beta^2 - 1) \cdot y \quad + \quad 0 \cdot z \quad + \quad u \quad = \quad \beta$$
[2 body]

2. Nechť je dána matice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   - Najděte $\mathbb{A}^{-1}$ pomocí Gaussovy eliminace.
   - Najděte $[\mathbb{A}^{-1}]_{31}$ pomocí adjungované matice (uveďte obecně vzorce, které používáte).

   [4 body]

   BONUS za 1 bod: Spočtěte $\det(\mathbb{A}^{adj})$.

3. Nechť $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Je matice $\mathbb{A}$
   (a) normální,
   (b) hermitovská,
   (c) pozitivně definitní?

   Pokud jste nějakou vlastnost zaškrtli, napište, co z ní vyplývá bez počítání pro spektrum $\sigma(\mathbb{A})$ a diagonalizovatelnost $\mathbb{A}$.
   Poté najděte vlastní čísla matice $\mathbb{A}$ a k nim příslušné vlastní vektory.

   [4 body]

4. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, kde $\mathbb{R}^4$ je eukleidovský (tedy se standardním skalárním součinem),
$$P = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda.$$
   Najděte
   (a) ortonormální bázi P,
   (b) OG průmět vektoru $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ do P, tedy $\vec{a}_P$,
   (c) vzdálenost $\vec{a}$ od P.

   [6 bodů]

5. Nechť jsou dány lineární variety W_1, W_2 v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^4$:
$$W_1 = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\alpha, \qquad W_2 \equiv \begin{array}{ccccccccc} x & = & 2 & + & t & + & s & + & r \\ y & = & 0 & - & t & & & & \\ z & = & 0 & + & t & + & s & & \\ u & = & 0 & - & t & + & s & + & r \end{array}.$$

Určete, o jaké lineární variety se jedná. Najděte parametrické rovnice W_1 a normálové rovnice W_2. Najděte jejich vzájemnou polohu a průnik.

[4 body]

Teorie

1.
   - Definujte podobnost matic.
   - Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá. Svá rozhodnutí zdůvodněte.
     (a) Každá čtvercová matice s komplexními prvky je podobná horní trojúhelníkové matici.
     (b) Každá čtvercová matice s komplexními prvky je podobná diagonální matici.
     (c) Každá PD matice s komplexními prvky je podobná matici v horním stupňovitém tvaru.
   - Co platí pro charakteristické polynomy podobných matic? Tvrzení dokažte.

   [3 body]

2.
   - Tvoří množina řešení soustavy LAR lineární varietu? Pokud ano, co je jejím zaměřením a co je jejím vektorem posunutí?
   - Vyrobte soustavu LAR, jejímž řešením je lineární varieta W_2 z příkladu 5.
   - Tvoří množina řešení kvadratické rovnice $x^2 + y^2 = 1$ lineární varietu v $\mathbb{R}^2$? Vysvětlete.
   - Tvoří množina řešení kvadratické nerovnice $x^2+y^2 < 1$ lineární varietu v $\mathbb{R}^2$? Vysvětlete.
   - Tvoří množina řešení kvadratické rovnice $x^2+y^2 = 1$ konvexní množinu v $\mathbb{R}^2$? Vysvětlete.

   [3 body]

3.
   - Definujte pozitivně definitní matici s prvky z $\mathbb{C}$.
   - Co platí pro vlastní čísla PD matice? Tvrzení dokažte.
   - Co platí pro determinant PD matice? Tvrzení dokažte.
   - Z následujících tvrzení vyberte pravdivá. U nepravdivých uveďte protipříklad. Nechť $\mathbb{A}$ je čtvercová matice s komplexními prvky.
     (a) $\mathbb{A}$ je PD $\Leftrightarrow$ vlastní čísla $\mathbb{A}$ jsou kladná.
     (b) $\mathbb{A}$ je PD $\Leftrightarrow$ $\mathbb{A}$ je hermitovská a vlastní čísla $\mathbb{A}$ jsou ≥ 0.
     (c) $\mathbb{A}$ je PD $\Leftrightarrow$ $\mathbb{A}$ je hermitovská a všechny její hlavní subdeterminanty jsou kladné.

   [3 body]

Hodnocení

1. Kdo získá $13 - 14$ bodů (z 20 možných) z praktické části a z žádného příkladu ani žádné otázky nebude mít 0 bodů a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.

2. Kdo získá $15 - 16$ bodů z praktické části a z žádného příkladu ani žádné otázky nebude mít 0 bodů a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.

3. Kdo získá $17 - 18$ bodů z praktické části a z žádného příkladu nebude mít 0 bodů a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.

4. Kdo získá $19 - 20$ bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.