Zkoušková písemka 3.6.2010 Jméno:

Praxe

1. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ nalezněte množinu všech řešení následující soustavy

$$\begin{array}{rcrcrcl} -\alpha x & + & y & + & \alpha z & = & 1 \\ \alpha^2 x & + & y & + & \alpha z & = & \alpha \\ -\alpha^3 x & + & \alpha y & + & \alpha z & = & \alpha^2 \\ (\alpha^2-\alpha)x & + & 2y & + & 2\alpha z & = & \alpha+1 \end{array}$$

[4 body]

2. Nechť je dána matice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

   - Najděte $\mathbb{A}^{-1}$ pomocí Gaussovy eliminace.
   - Najděte $[\mathbb{A}^{-1}]_{31}$ pomocí adjungované matice (uveďte obecně vzorce, které používáte).

   [4 body]

   BONUS za 1 bod: Co platí pro determinant $\mathbb{A}^{adj}$, známe-li $\det \mathbb{A}$, kde $\mathbb{A}$ je regulární matice řádu $n \geq 2$.

3. Je matice $\mathbb{A}$ podobná matici $\mathbb{B}$? Pokud ano, najděte matici podobnostní transformace.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

[4 body]

4. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$,

$$P = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}]_\lambda.$$

Najděte $P^\perp$, pokud

(a) $\mathbb{R}^4$ je eukleidovský, tj. se standardním skalárním součinem

(b) $\mathbb{R}^4$ je vybaven $\mathbb{A}$-skalárním součinem s maticí $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

[4 body]

5. Nechť jsou dány lineární variety W_1, W_2 v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^4$:

$$W_1 = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}]_\alpha, \qquad W_2 \equiv \begin{array}{rclcrcrcr} x & = & 1 & + & t & + & s & + & r \\ y & = & 0 & - & t & & & & \\ z & = & 0 & + & t & + & s & & \\ u & = & 0 & - & t & + & s & + & r \end{array}.$$

Určete, o jaké lineární variety se jedná. Najděte jejich vzájemnou polohu a průnik.

[4 body]

Teorie

1.
   - Definujte hodnost matice.
   - Co víte o hodnosti $\overline{\mathbb{A}}, \mathbb{A}^T, \mathbb{A}^H$, znáte-li $h(\mathbb{A})$?
   - Co platí pro hodnost součinu matic?
   - Definujte inverzní matici.
   - Co platí pro hodnost inverzní matice? Tvrzení dokažte.

   [3 body]

2.
   - Definujte vlastní číslo, vlastní vektor, charakteristický polynom, algebraickou a geometrickou násobnost vlastního čísla.
   - Co platí pro vlastní čísla horní trojúhelníkové matice. Tvrzení dokažte.
   - Nechť λ je vlastní číslo $\mathbb{A}$. Pokud je algebrická násobnost λ rovna 1, co víme o geometrické násobnosti? Odkud tvrzení plyne?
   - Spočtěte $\det \mathbb{A}$, kde $\mathbb{A}$ je řádu n a spektrum $\mathbb{A}$ obsahuje pouze číslo 2. Z jakého vzorce vycházíte?

   [3 body]

3.
   - Definujte pozitivně definitní matici s prvky z $\mathbb{C}$.
   - Co platí pro vlastní čísla PD matice? Tvrzení dokažte.
   - Co platí pro determinant PD matice? Tvrzení dokažte.
   - Uveďte 2 kritéria pro rozhodování, zda je matice PD.
   - Rozhodněte, které z následujících matic jsou PD. Rozhodnutí musí být zdůvodněno.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   [3 body]

Hodnocení

1. Kdo získá $13 - 14$ bodů (z 20 možných) z praktické části a z žádného příkladu ani žádné otázky nebude mít 0 bodů a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.
2. Kdo získá $15 - 16$ bodů z praktické části a z žádného příkladu ani žádné otázky nebude mít 0 bodů a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.
3. Kdo získá $17 - 18$ bodů z praktické části a z žádného příkladu nebude mít 0 bodů a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.
4. Kdo získá $19 - 20$ bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.