Zkoušková písemka 2.9.2010 Jméno:

Praxe

1. Nechť $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -i & i & 1 \\ 1 & -1 & i \end{pmatrix}$. Najděte množinu všech řešení soustavy (v komplexním oboru)

$$\text{(a)} \quad \mathbb{A}\vec{x} = \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad (\mathbb{A}^H\mathbb{A})\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[4 body]

2. Nechť jsou dány $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha \\ 0 & \alpha & \alpha & \alpha \end{pmatrix}$.

   (a) Pokud existuje $\mathbb{A}^{-1}$, spočtěte ji.

   (b) Najděte $\mathbb{B}^{-1}$ pro ta z $\alpha \in \mathbb{R}$, pro která existuje.

   (c) Najděte $(\mathbb{A}\mathbb{B})^{-1}$ pro ta z $\alpha \in \mathbb{R}$, pro která existuje.

   (d) Pro $\alpha = 1/4$ najděte 3. složku řešení (tj. x_3) $(\mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^{-1})\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ pomocí Cramerova pravidla.

   [4 body]

3. Je dána matice $\mathbb{A} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Najděte vlastní čísla matice $\mathbb{A}$ a k nim příslušné vlastní vektory.

   (b) Rozhodněte o diagonalizaci matice $\mathbb{A}$.

   (c) Najděte bázi $\mathbb{C}^3$ složenou z vlastních vektorů matice $\mathbb{A}$, existuje-li.

   [4 body]

4. Najděte ortogonální doplněk k $P = [\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}]_\lambda \subset\subset \mathbb{R}^4$, je-li

   (a) $\mathbb{R}^4$ vybaven standardním skalárním součinem,

   (b) $\mathbb{R}^4$ vybaven $\mathbb{A}$-skalárním součinem s maticí $\mathbb{A} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

   [4 body]

5. Nechť W_1, W_2 jsou množiny v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ zadané následovně: W_1 je nejmenší lineární varieta obsahující vektory $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ a W_2 je množinou řešení soustavy s maticí $\mathbb{A}$ z příkladu 4.(b) a pravou stranou $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$. Určete, o jaké lineární variety se jedná (pokud je W_2 také lineární varieta). Najděte normálové rovnice W_1 a parametrické rovnice W_2. Určete vzájemnou polohu W_1 a W_2 a průnik $W_1 \cap W_2$.

   [4 body]

Teorie

1. (a) Vyslovte Frobeniovu větu.
   (b) BONUS za 1 bod: Dokažte bod Frobeniovy věty týkající se existence řešení soustavy LAR.
   (c) Nechť $\mathbb{A}$ je matice rozměru $m \times n$ s prvky z $\mathbb{C}$. Označme S množinu řešení homogenní soustavy s maticí $\mathbb{A}$ a S' množinu řešení homogenní soustavy s maticí $\mathbb{A}^H\mathbb{A}$. Vyberte, který z následujících vztahů platí, a vysvětlete proč. (Jako nápověda Vám může sloužit praktický příklad 1.)
      i. $S \subset S'$,
      ii. $S' \subset S$,
      iii. $S = S'$.

2. (a) Definujte transpozici.
   (b) Jak lze definovat znaménko permutace pomocí transpozic?
   (c) Z následujících tvrzení vyberte pravdivé (pravdivá). Nepravdivá tvrzení vyvraťte konkrétními protipříklady.
      i. Každá permutace je složením konečně mnoha transpozic. Toto složení transpozic je pro každou permutaci jediné možné.
      ii. Každá permutace je složením konečně mnoha transpozic. Některé permutace lze psát jako složení transpozic více možnými způsoby, ale počet transpozic je v každém z těchto složení stejný.
      iii. Každá permutace je složením konečně mnoha transpozic. Některé permutace lze psát jako složení transpozic více možnými způsoby, ani počet transpozic není v každém z těchto složení stejný, stejná je ale parita počtu transpozic ve složení.

   [3 body]

3. (a) Definujte skalární součin na obecném vektorovém prostoru V nad tělesem $\mathbb{C}$.
   (b) Odvoďte z axiomů, proč pro libovolný vektor $\vec{x} \in V$ platí $< \vec{x}, \vec{0} >= 0$.
   (c) BONUS za 1/2 bodu: Jak spočtete pomocí determinantu obsah rovnoběžníka o vrcholech
   $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

   [3 body]

Hodnocení

1. Kdo získá $13 - 14$ bodů (z 20 možných) z praktické části a z žádného příkladu ani žádné otázky nebude mít 0 bodů a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.

2. Kdo získá $15 - 16$ bodů z praktické části a z žádného příkladu ani žádné otázky nebude mít 0 bodů a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.

3. Kdo získá $17 - 18$ bodů z praktické části a z žádného příkladu nebude mít 0 bodů a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.

4. Kdo získá $19 - 20$ bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.