Zkoušková písemka 2.6.2010 Jméno:

Praxe

1. V závislosti na parametru $\beta \in \mathbb{R}$ najděte jádro a hodnost zobrazení $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ zadaného pomocí matice ve standardních bázích

$$^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} \beta & -\beta & 1 \\ -\beta & \beta^2 & -1 \end{pmatrix}.$$

[4 body]

2. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Spočtěte z definice i přerovnáním řádků determinant matice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 2 & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & n-1 & \dots & 0 & 0 \\ n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

BONUS za 1 bod: najděte matici $\mathbb{A}^{-1}$, pokud existuje.

[4 body]

3. Je dána matice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nejprve uveďte, co vše o jejích vlastních číslech, vlastních vektorech a diagonalizovatelnosti víme z teorie. Poté najděte její vlastní čísla a k nim příslušné LN vlastní vektory.

[4 body]

4. Najděte OG bázi prostoru $\mathbb{R}^3$ obsahující vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- nejprve při použití standardního skalárního součinu,
- poté při použití $\mathbb{A}$-skalárního součinu s maticí

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[4 body]

5. Nechť W_1, W_2, W_3 jsou lineární variety v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ zadané následovně:

W_1 je nejmenší lineární varieta obsahující vektory $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $W_2 \equiv \begin{array}{rcrcrcr} x & = & 1 & + & t & - & 2s \\ y & = & 1 & + & t & - & s \\ z & = & 1 & + & t & - & s \\ u & = & 1 & + & t & - & s \end{array}$,

$W_3 \equiv \begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & & & = & 0 \\ x & & & - & z & = & 0 \end{array}$

Určete, o jaké lineární variety se jedná. Najděte vzájemnou polohu W_1 a W_2 a průnik $W_1 \cap W_2 \cap W_3$.

[4 body]

Teorie

1. Definujte
    - permutaci,
    - inverzi v permutaci,
    - znaménko permutace,
    - ilustrujte pojmy na konkrétním příkladu.

    Dále definujte determinant matice. Jaký je determinant matice čtvercové matice $\mathbb{B}$, která vznikla z $\mathbb{A}$ záměnou 1. a 2. řádku? Jaký je determinant čtvercové matice $\mathbb{C}$, která vznikla z $\mathbb{A}$ vynásobením všech prvků číslem 3?

    [3 body]

2. - Vyslovte matematicky správně větu, která říká, že každý lineárně nezávislý soubor lze ortogonalizovat. Popiště Gram-Schmidtův ortogonalizační proces, který umožňuje lineárně nezávislý soubor ortogonalizovat.

    [3 body]

3. - Definujte hermitovskou matici.
    - Uveďte příklad takové matice různé od jednotkové.
    - Vyslovte a dokažte tvrzení o jejích vlastních číslech a determinantu.

    [3 body]

Hodnocení

1. Kdo získá 13 – 14 bodů (z 20 možných) z praktické části a z žádného příkladu ani žádné otázky nebude mít 0 bodů a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.
2. Kdo získá 15 – 16 bodů z praktické části a z žádného příkladu ani žádné otázky nebude mít 0 bodů a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.
3. Kdo získá 17 – 18 bodů z praktické části a z žádného příkladu nebude mít 0 bodů a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.
4. Kdo získá 19 – 20 bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.