Zkoušková písemka 1.6.2010 Jméno:

Praxe

1. V závislosti na parametru $\beta \in \mathbb{R}$ nalezněte množinu všech řešení následující soustavy

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & - & 2\beta y & + & (2+\beta)z & - & u & = & 2 \\ \beta x & - & \beta^2 y & & & + & u & = & \beta \end{array}$$

[4 body]

2. Pomocí Cramerova pravidla vyřešte soustavu LAR

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & 4z & = & 8 \\ x & - & y & + & z & = & -1 \end{array}$$

[4 body]

BONUS za 1 bod: Spočtěte pomocí determinantu obsah trojúhelníka v $\mathbb{R}^2$ s vrcholy $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3. Rozhodněte, pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ je diagonalizovatelná matice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1-\alpha \\ -\alpha & -1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

[4 body]

4. Doplňte vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, je-li to možné, na OG bázi prostoru

(a)

$$P = [\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}]_\lambda$$

(b)

$$Q = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}]_\lambda$$

[4 body]

5. Nechť W_1, W_2, W_3 jsou lineární variety v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ zadané následovně:

$$W_1 = [\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda, \qquad W_2 \equiv \begin{array}{rcrcrcr} x & = & 1 & + & t & - & s \\ y & = & 1 & + & t & - & s \\ z & = & 1 & + & t & - & s \\ u & = & 1 & + & t & - & s \end{array},$$

$$W_3 \equiv \begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & & & = & 1 \\ x & & & - & z & = & 2 \end{array}$$

Určete, o jaké lineární variety se jedná. Najděte vzájemnou polohu W_1 a W_2 a průnik $W_1 \cap W_3$.

[4 body]

Teorie

1. - Definujte hodnost matice a hodnost lineárního zobrazení.
   - Vyslovte větu, která obě tyto hodnosti svazuje.
     (Stačí pro lineární zobrazení: $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$.)
   - Pomocí této věty najděte hodnost lineárního zobrazení $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^2)$ definovaného pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ jako
     $$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$$
   - Definujte regulární matici a rozhodněte, zda matice zobrazení A ve standardních bázích (z předchozího bodu) je regulární. Tvrzení zdůvodněte.

   [3 body]

2. - Popište Gaussovu eliminační metodu pro výpočet $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}$.
   - Vyslovte tvrzení, které říká, čemu je rovna matice, ve které provedeme konečný počet ekvivalentních řádkových úprav.
   - Pomocí tohoto tvrzení dokažte, že Gaussova eliminace funguje.
   - Znáte-li regulární matici $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ vhodného rozměru, jakým způsobem použijete Gaussovu eliminaci k výpočtu $\mathbb{B}\mathbb{A}^{-1}$, a to bez výpočtu $\mathbb{A}^{-1}$?
   - Ilustrujte předchozí bod pro konkrétní malé matice $\mathbb{A}, \mathbb{B}$.

   [3 body]

3. - Vyslovte větu známou jako trojúhelníková nerovnost, včetně popisu případu, kdy nastává rovnost.
   - Vyslovte a dokažte Pythagorovu větu.
   - Za jaké podmínky platí v Pythagorově větě opačná imlikace?
   - Definujte OG průmět vektoru do podprostoru.

   [3 body]

Hodnocení

1. Kdo získá $13 - 14$ bodů (z 20 možných) z praktické části a z žádného příkladu ani žádné otázky nebude mít 0 bodů a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dostatečně E. V opačném případě nedostatečně F.

2. Kdo získá $15 - 16$ bodů z praktické části a z žádného příkladu ani žádné otázky nebude mít 0 bodů a získá 6 bodů z teorie, má nárok na hodnocení uspokojivě D.

3. Kdo získá $17 - 18$ bodů z praktické části a z žádného příkladu nebude mít 0 bodů a získá 7 bodů z teorie, má nárok na hodnocení dobře C. Pokud chce získat hodnocení velmi dobře B, musí pokračovat ve zkoušení ústně.

4. Kdo získá $19 - 20$ bodů z praktické části a odpoví úplně správně na všechny teoretické otázky, má nárok na hodnocení velmi dobře B. Pokud chce získat hodnocení výborně A, musí pokračovat ve zkoušení ústně.