9. cvičení LAL2

Skalární součin

1. V $\mathbb{R}^2$ definujeme zobrazení $\langle \vec{x}|\vec{y}\rangle = x_1y_1+2x_2y_2+x_1y_2+x_2y_1$, kde $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ a $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Je to skalární součin?

2. V $\mathcal{P}$ definujeme $\langle x|y\rangle = x(0)\overline{y(0)} + x(1)\overline{y(1)} + x(2)\overline{y(2)}$. Je to skalární součin?

3. Nechť V je reálný vektorový prostor funkcí definovaných a spojitých na intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Dokažte, že následující zobrazení je skalární součin na V.
$$h(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt \quad \text{pro každé } f,g \in V.$$

4. V $\mathbb{R}^3$ definujeme skalární součin $\langle \vec{x}|\vec{y}\rangle = 4x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1$. Najděte všechny vektory kolmé na $\vec{e}_1$.

5. V unitárním prostoru $\mathbb{C}^2$ najděte dvě různé ON báze.

6. V eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ je dán podprostor $P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \\ -12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right]_\lambda$.
Najděte ON bázi P. (a) Bez použití Gram-Schmidta a (b) s použitím Gram-Schmidta.

7. V eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ doplňte vektory $\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \right)$ na ON bázi.
(a) Bez použití Gram-Schmidta a (b) s použitím Gram-Schmidta.

8. Nechť $P = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 8 & -7 \end{pmatrix} \right]_\lambda \subset\subset \mathbb{R}^{2,2}$. Najděte OG bázi obsahující vektor z $\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda$, je-li dán skalární součin $\langle \mathbb{A}|\mathbb{B}\rangle = \sum_{i,j=1}^{2} \mathbb{A}_{ij}\mathbb{B}_{ij}$.

9. Nechť $P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda \subset\subset \mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem. Najděte $P^\perp$.
Najděte dvěma různými způsoby OG průmět $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ do P.

10. Najděte OG bázi $P \subset\subset \mathbb{R}^3$, kde $P \equiv 2x - 2y + z = 0$, je-li v $\mathbb{R}^3$ definován skalární součin ve standardní bázi
$$\langle \vec{x}|\vec{y}\rangle = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_3,$$
tak, aby báze obsahovala vektor z $Q \equiv x - y - z = 0$.

11. Nechť $P \subset \mathbb{R}^3$ se skalárním součinem
$$\langle \vec{x}|\vec{y}\rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 + 6x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2.$$
Najděte ON bázi $P^\perp$, je-li $P \equiv x = 0$.

12. Nechť $P, Q \subset\subset \mathbb{R}^4$, kde $\mathbb{R}^4$ je eukleidovský prostor. Najděte $Q^\perp$ do P, je-li $P = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right]_\lambda$ a $Q = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right]_\lambda$.

13. Nechť $\mathcal{P}_3$ je prostor polynomů stupně maximálně 2 se skalárním součinem
    (a) $\langle x|y\rangle = \alpha_0\overline{\beta_0} + \alpha_1\overline{\beta_1} + \alpha_2\overline{\beta_2}$,
    (b) $\langle x|y\rangle = \alpha_0\overline{\beta_0} - \alpha_0\overline{\beta_1} - \alpha_1\overline{\beta_0} + 2\alpha_1\overline{\beta_1} + 4\alpha_2\overline{\beta_2}$,

    kde $x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$ a $y(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2$ pro každé $t \in \mathbb{C}$. Najděte jeho ON bázi v prvním a druhém případě.

Domácí úkoly

1. Nechť je v prostoru matic $\mathbb{R}^{2,2}$ dán skalární součin s maticí ${}^{\mathcal{E}}Q = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Řešte úlohu 8. s takto zadaným skalárním součinem.

2. Nechť $P = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$ a $Q = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right]_\lambda$. V $\mathbb{R}^4$ je definován skalární součin ve standardní bázi $\mathcal{E}$

$$\langle \vec{x} \mid \vec{y}\rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 - x_1y_4 - x_4y_1.$$

    Najděte ON bázi $Q^\perp$ do P.

3. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, kde $P \equiv x - 2y + z = 0$. V $\mathbb{R}^4$ je definován skalární součin

$$\langle \vec{x} \mid \vec{y}\rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 + 6x_3y_3 + x_4y_4 - x_1y_4 - x_4y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2,$$

    kde $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ a $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$. Najděte
    (a) $P^\perp$,
    (b) $\vec{a}_P$, je-li $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4. Vytvořte program pro ortogonalizaci vektorů pomocí Gramova-Schmidtova ortogonalizačního procesu v prostoru $\mathbb{R}^n$. Nechť uživatel sám zadává, jak vypadá skalární součin (např. pomocí matice odpovídajíci kvadratické formy ve standardní bázi). Program musí samozřejmě kontrolovat, zda jde o dobře zadaný skalární součin (vhodné je využít Sylvesterova kritéria). A dále samozřejmě uživatel zadává, jaké vektory chce ortogonalizovat (libovolný počet mezi 1 a n). Program musí kontrolovat jejich LN. (2 týdny)