6. cvičení LAL2

Vlastní čísla a vlastní vektory operátorů

1. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ je operátor zrcadlení podle osy x. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory operátoru A. Je diagonalizovatelný?

2. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ je operátor rotace o $\frac{\pi}{2}$ proti směru ručiček hodin. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory operátoru A. Je diagonalizovatelný?

3. Nechť $A \in \mathcal{L}(V_3)$, $\mathcal{X}$ je báze V_3. Je A diagonalizovatelný operátor? Pokud ano, najděte bázi $\mathcal{Y}$ tak, že ${}^{\mathcal{Y}}A$ je diagonální matice.

   (a)
   $$^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix},$$

   (b)
   $$^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Nechť $A \in \mathcal{L}(V_3)$, $\mathcal{X}$ je báze V_3. Je A^{-1} diagonalizovatelný operátor? Pokud ano, najděte bázi $\mathcal{Y}$ tak, že ${}^{\mathcal{Y}}(A^{-1})$ je diagonální matice.
   $$^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} -20 & 9 & -18 \\ 6 & -5 & 6 \\ 24 & -12 & 22 \end{pmatrix}.$$

5. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$, $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^4$ a $\mathcal{E}$ je standardní báze $\mathbb{R}^4$. Je A diagonalizovatelný operátor? Pokud ano, najděte bázi $\mathcal{Y}$ tak, že ${}^{\mathcal{Y}}A$ je diagonální matice.
   $$^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ a $\mathcal{E}$ je standardní báze $\mathbb{R}^4$. Najděte všechna $\alpha \in \mathbb{R}$, pro která je A diagonalizovatelný.
   $$^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3)$ splňuje $Ax(t) = x(\alpha - 2t)$ pro každé $x \in \mathcal{P}_3$ a každé $t \in \mathbb{C}$. Pro jaká $\alpha \in \mathbb{C}$ je A diagonalizovatelný? Pro taková α najděte $\mathcal{Y}$ bázi $\mathcal{P}_3$ takovou, že ${}^{\mathcal{Y}}A$ je diagonální matice.

8. Nechť $D, S \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$ jsou operátory derivování a integrování na $\mathcal{P}$. Najděte spektrum a všechny vlastní vektory D a S. (Viz též skripta a přednášky.)

9. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$ splňuje $Ax(t) = x(t+1)$ pro každé $x \in \mathcal{P}$ a každé $t \in \mathbb{C}$. Najděte spektrum a všechny vlastní vektory A.

Domácí úloha

1. Nechť $P, Q \subset\subset V, P \neq V, Q \neq V, P \oplus Q = V$. Nechť A_P je projektor na P podle Q.

   (a) Nalezněte $\sigma(A_P)$.

   (b) Je-li $\dim V \in \mathbb{N}$, určete algebraickou a geometrickou násobnost vlastních čísel operátoru A_P.

   (c) Je operátor A_P diagonalizovatelný v případě $\dim V \in \mathbb{N}$?

2. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$

$$^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   V následujících úlohách využijte teoretické znalosti tak, abyste počítali co nejméně.

   (a) Najděte spektrum A a určete, pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ je A diagonalizovatelný.

   (b) Najděte spektrum A^{-1} a určete, pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ je A^{-1} diagonalizovatelný.

3. Naprogramujte Cramerovo pravidlo a výpočet inverzní matice pomocí adjungované (1 týden).