

5. cvičení LAL2

Vlastní čísla a vlastní vektory matic

1. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory následujících matic. Rozhodněte o jejich diagonalizovatelnosti. Jsou-li diagonalizovatelné, najděte regulární \mathbb{X} a diagonální \mathbb{D} tak, aby $\mathbb{A} = \mathbb{X}\mathbb{D}\mathbb{X}^{-1}$.

(a)

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix},$$

(b)

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

(c)

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -20 & 9 & -18 \\ 6 & -5 & 6 \\ 24 & -12 & 22 \end{pmatrix}.$$

2. Necht $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je regulární. Vyšetřete vztah:

- (a) spekter \mathbb{A} a \mathbb{A}^{-1} ,
- (b) algebraických násobností vlastních čísel \mathbb{A} a \mathbb{A}^{-1} ,
- (c) geometrických násobností vlastních čísel \mathbb{A} a \mathbb{A}^{-1} ,
- (d) diagonalizovatelnosti \mathbb{A} a \mathbb{A}^{-1} .

3. Je \mathbb{A}^{-1} diagonalizovatelná matice? Pokud ano, najděte regulární \mathbb{X} a diagonální \mathbb{D} tak, aby $\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{X}\mathbb{D}\mathbb{X}^{-1}$.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -20 & 9 & -18 \\ 6 & -5 & 6 \\ 24 & -12 & 22 \end{pmatrix}.$$

4. Necht jsou dány matice $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Jaký je vztah mezi vlastními čísly a vlastními vektory matic:

- (a) \mathbb{A} a \mathbb{A}^2 ,
- (b) \mathbb{A} a $\mathbb{A} + \alpha\mathbb{I}$, kde $\alpha \in \mathbb{C}$,
- (c) \mathbb{A} a \mathbb{A}^T ,
- (d) \mathbb{A}, \mathbb{B} a $\mathbb{A} + \mathbb{B}$,
- (e) \mathbb{A}, \mathbb{B} a $\mathbb{A}\mathbb{B}$,
- (f) $\mathbb{A}\mathbb{B}$ a $\mathbb{B}\mathbb{A}$ pro \mathbb{A}, \mathbb{B} regulární.

Domácí úloha

- 1. Naprogramujte Cramerovo pravidlo a výpočet inverzní matice pomocí adjungované (2 týdny).
- 2. Pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ je matice \mathbb{A} diagonalizovatelná?

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 3. Najděte \mathbb{A}^{10} z příkladu 1.(a), aniž byste ji opravdu samu se sebou opakovaně násobili.