3. cvičení LAL2

Permutace

1. Nechť $\pi_1, \pi_2 \in S_5$

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \ \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Najděte $\pi_1 \circ \pi_2,\ \pi_2 \circ \pi_1,\ \pi_1^{-1}$.

   (b) Najděte všechny inverze v π_1, resp. π_2, a určete $\mathrm{sgn}\pi_1$ a $\mathrm{sgn}\pi_2$.

   (c) Napište π_1 a π_2 jako složení transpozic.

   (d) Napište π_1 a π_2 jako složení cyklů. Pro jaké nejmenší $k \in \mathbb{N}$ platí $\pi_2^k = \mathrm{id}$?

2. Nechť $\pi \in S_7$

$$\pi = (2, 3, 6, 7, 1, 4, 5).$$

   Pozor, jde o zápis pomocí cyklu, tedy $\pi(2) = 3, \pi(3) = 6, \pi(6) = 7, \pi(7) = 1, \pi(1) = 4, \pi(4) = 5, \pi(5) = 2$.

   Dokažte, že $\pi^{259} = \mathrm{id}$.

Determinant

1. Rozhodněte, zda jde o člen determinantu matice $\mathbb{A}$ řádu 6.

   (a) $\mathbb{A}_{42}\mathbb{A}_{64}\mathbb{A}_{11}\mathbb{A}_{53}\mathbb{A}_{26}\mathbb{A}_{65}$,

   (b) $\mathbb{A}_{11}\mathbb{A}_{42}\mathbb{A}_{53}\mathbb{A}_{64}\mathbb{A}_{35}\mathbb{A}_{26}$.

2. Pro jaké i, k jde o člen determinantu matice $\mathbb{A}$ řádu 7?

$$-\mathbb{A}_{22}\mathbb{A}_{3k}\mathbb{A}_{76}\mathbb{A}_{13}\mathbb{A}_{57}\mathbb{A}_{4i}\mathbb{A}_{65}.$$

3. Určete, jaké znaménko má v determinantu $\mathbb{A}$ řádu n součin prvků

   (a) na hlavní diagonále,

   (b) na vedlejší diagonále.

4. Rozložte polynom p na kořenové činitele bez výpočtu determinantu

$$p(x) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ x & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & x & 3 & \dots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x & n \end{vmatrix}.$$

5. Čemu se rovná determinant

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x + b_1y + c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x + b_2y + c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x + b_3y + c_3 \end{vmatrix} ?$$

6. Vypočtěte

   (a)
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

   (b)
$$\begin{vmatrix} x & y & y & y & \dots & y & y \\ y & x & y & y & \dots & y & y \\ y & y & x & y & \dots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ y & y & y & y & \dots & y & x \end{vmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{C},$$

   (c)
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & x & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 1 & x & x & x & \dots & x & 0 \end{vmatrix}, \quad x \in \mathbb{C}.$$

7. Spočtěte determinant

   (a) pomocí faktu, že jde o n-lineární formu,

   (b) rozložením příslušné matice na součin dvou matic.

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 + b_2 & \dots & a_1 + b_n \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 & \dots & a_2 + b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n + b_1 & a_n + b_2 & \dots & a_n + b_n \end{vmatrix}.$$

Domácí úlohy

1. Víte-li, že 23 dělí beze zbytku čísla $253, 529, 391$, dokažte bez výpočtu determinantu, že je také dělitelný beze zbytku číslem 23.
$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 9 \\ 3 & 9 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Víte-li, že a, b, c jsou kořeny polynomu $x^3 + px + q$, dokažte, že $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 0.$

3. Jak se změní determinant matice n-tého řádu s komplexními prvky, pokud

   (a) napíšeme řádky v opačném pořadí,

   (b) napíšeme sloupce v opačném pořadí,

   (c) překlopíme matici podle hlavní diagonály,

   (d) překlopíme matici podle vedlejší diagonály,

   (e) zrcadlíme prvky matice podle středu,

(f) každý prvek vynásobíme číslem $\alpha \neq 0$,

(g) každý prvek $\mathbb{A}_{ij}$ vynásobíme α^{i-j}, $\alpha \neq 0$,

(h) od každého řádku kromě posledního odečteme následující řádek a od posledního odečteme původní první řádek,

(i) ke každému sloupci (počínaje posledním a konče druhým) přičteme předcházející a k prvnímu sloupci přičteme původní poslední sloupec,

(j) každý prvek matice nahradíme číslem komplexně sdruženým.