

## Cvičení LAL2 – 1. část

### Frobeniova věta – řešení soustav LAR s parametry

Není-li řečeno jinak, hledejte řešení v oboru komplexních čísel.

1. (cvičení) Najděte množinu všech řešení soustavy LAR v závislosti na parametrech  $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{C}$ . V případě, kdy má soustava jedno řešení, nemusíte je hledat.

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y + \alpha\beta z &= \alpha \\ x + \alpha y + \beta z &= \alpha\beta \\ \alpha\beta x + y + \alpha z &= \beta \end{aligned}$$

2. Najděte množinu všech řešení soustavy LAR v závislosti na parametrech  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . V případě, kdy má soustava jedno řešení, nemusíte je hledat.

$$\begin{aligned} \alpha x + \alpha\beta y + \beta z &= 1 \\ -\beta x + \beta y + \beta z &= \beta \\ \alpha\beta x + \alpha y - \beta z &= 1 \end{aligned}$$

3. Najděte množinu všech řešení soustavy LAR v závislosti na parametrech  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ .

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y + \beta z &= 1 \\ \beta x + \alpha y + \beta z &= 1 \\ \beta x + \beta y + \alpha z &= 1 \end{aligned}$$

4. Najděte množinu všech reálných řešení soustavy LAR v závislosti na parametrech  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ . Pokud existuje jediné řešení, nemusíte je hledat.

$$\begin{aligned} x + \alpha y + \alpha^2 z &= \alpha^3 \\ x + \beta y + \beta^2 z &= \beta^3 \\ x + \gamma y + \gamma^2 z &= \gamma^3 \end{aligned}$$

5. Najděte množinu všech řešení soustavy LAR v závislosti na parametrech  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Pokud existuje jediné řešení, nemusíte je hledat.

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y + \beta z &= 1 \\ \beta x + \alpha y + z &= -2 \\ x + y + \alpha z &= 1 \end{aligned}$$

6. Najděte množinu všech řešení soustavy LAR v závislosti na parametru  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

$$\begin{aligned} \alpha x + iy - iz &= i \\ ix + \alpha y + \alpha z &= i \end{aligned}$$

7. V závislosti na parametrech  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  najděte množinu řešení  $x, y, z \in \mathbb{R}$  soustavy

$$\begin{aligned} \alpha x + \alpha y + \alpha z &= \alpha \\ \alpha x + \alpha\beta y + \alpha\beta^2 z &= \alpha\beta \\ \beta x + \beta\alpha y + \beta\alpha^2 z &= \beta\alpha \end{aligned}$$

8. Najděte množinu všech řešení soustavy LAR v závislosti na parametrech  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Pokud existuje jediné řešení, nemusíte je hledat.

$$\begin{aligned} 2x + \alpha y + z &= 1 \\ (1 + 2\alpha\beta)x + \alpha^2\beta y + \alpha\beta z &= 1 \\ \alpha^2\beta x + \alpha^3\beta y + (2 - \alpha)\beta z &= \beta \end{aligned}$$

9. (cvičení) Určete, pro jaké hodnoty parametrů  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  je soustava řešitelná, případně určete dimenzi množiny řešení.

$$\begin{aligned} \beta^2 x + y + \beta z &= \beta \\ \alpha x - \beta y + z &= \beta^2 \\ \alpha^2 x + y + \beta z &= \alpha \end{aligned}$$

## Výsledky: Frobeniova věta

$S$  značí množinu řešení soustavy LAR.

- (a) pro  $\alpha \neq 0 \wedge \beta \neq \pm 1 \wedge \beta \neq \alpha^2$  existuje 1 řešení

(b) pro  $\alpha = \beta = 0$  je  $S = \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$

(c) pro  $\alpha = \beta = 1$  je  $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$

(d) pro  $\alpha = 1 \wedge \beta = -1$  je  $S = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$

(e) v ostatních případech řešení neexistuje
- (a) pro  $\alpha \neq 0 \wedge \beta \neq 0 \wedge \beta \neq -1 \wedge \alpha(\beta - 1) \neq 2\beta$  existuje 1 řešení

(b) pro  $\alpha \neq 0 \wedge \beta = 0$  je  $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} \\ \frac{1}{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix} + \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$

(c) v ostatních případech řešení neexistuje
- (a) pro  $\beta \neq -\frac{\alpha}{2} \wedge \beta \neq \alpha$  je  $S = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha+2\beta} \\ \frac{1}{\alpha+2\beta} \\ \frac{1}{\alpha+2\beta} \end{pmatrix} \right\}$

(b) pro  $\beta = \alpha \wedge \beta \neq 0$  je  $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda$

(c) v ostatních případech řešení neexistuje
- (a) pro  $\alpha \neq \beta \wedge \alpha \neq \gamma \wedge \beta \neq \gamma$  existuje 1 řešení

(b) pro  $\alpha = \beta = \gamma$  je  $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} + \left[ \begin{pmatrix} -\alpha^2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda$

(c) pro  $\alpha = \beta \wedge \alpha \neq \gamma$  je  $S = \begin{pmatrix} -\alpha\gamma^2 - \alpha^2\gamma \\ \alpha^2 + \alpha\gamma + \gamma^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[ \begin{pmatrix} \alpha\gamma \\ -\alpha - \gamma \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$

(d) pro  $\alpha = \gamma \wedge \alpha \neq \beta$  nebo  $\beta = \gamma \wedge \beta \neq \alpha$  je  $S = \begin{pmatrix} -\alpha\beta^2 - \alpha^2\beta \\ \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[ \begin{pmatrix} \alpha\beta \\ -\alpha - \beta \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$

(e) v ostatních případech řešení neexistuje
- (a) pro  $\alpha \neq \beta \wedge \alpha \neq 1 \wedge \beta \neq -\alpha - 1$  existuje 1 řešení

- (b) pro  $\alpha \neq -\frac{1}{2} \wedge \beta = -\alpha - 1$  je  $S = \begin{pmatrix} \frac{\alpha+2}{2\alpha+1} \\ \frac{\alpha-1}{2\alpha+1} \\ 0 \end{pmatrix} + \left[ \begin{pmatrix} -\alpha^2 + 1 \\ -\alpha^2 - \alpha - 1 \\ 2\alpha + 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$
- (c) pro  $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$  je  $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \left[ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda$
- (d) v ostatních případech řešení neexistuje
6. (a) pro  $\alpha \neq \pm i$  je  $S = \begin{pmatrix} \frac{1+i\alpha}{1+\alpha^2} \\ \frac{1+i\alpha}{1+\alpha^2} \\ 0 \end{pmatrix} + \left[ \begin{pmatrix} 2i\alpha \\ 1 - \alpha^2 \\ 1 + \alpha^2 \end{pmatrix} \right]_\lambda$
- (b) pro  $\alpha = i$  je  $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda$
- (c) pro  $\alpha = -i$  je  $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda$
7. (a) pro  $\alpha \neq \beta \wedge \alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 1 \wedge \beta \neq 0 \wedge \beta \neq 1$  je  $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
- (b) pro  $\alpha = \beta = 0$  je  $S = \mathbb{R}^3$
- (c) pro  $\alpha = 0 \wedge \beta \neq 0$  je  $S = \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$
- (d) pro  $\alpha = 1 \wedge \beta \neq 1$  je  $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[ \begin{pmatrix} -\beta \\ \beta + 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$
- (e) pro  $\alpha = \beta = 1$  je  $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda$
- (f) pro  $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 1 \wedge \beta = 0$  je  $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$
- (g) pro  $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 1 \wedge \beta = 1$  je  $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[ \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha + 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$
- (h) pro  $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 1 \wedge \alpha = \beta$  je  $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[ \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha + 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$
- (i) v ostatních případech řešení neexistuje
8. (a) pro  $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 1 \wedge \alpha \neq -2 \wedge \beta \neq 0$  existuje 1 řešení
- (b) pro  $\alpha = -2 \wedge \beta = -\frac{1}{8}$  je  $S = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]_\lambda$
- (c) pro  $\alpha = 1 \wedge \beta = 1$  je  $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$

(d) pro  $\beta = 0$  je  $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\alpha \end{pmatrix}]_\lambda$

(e) v ostatních případech řešení neexistuje

9. (a) pro  $\beta \neq \pm i \wedge \alpha \neq \pm \beta$  je  $\dim S = 0$

(b) pro  $(\beta \neq \pm i \wedge \alpha = \beta)$  nebo  $(\beta = i \wedge \alpha = -\frac{1}{3}i)$  nebo  $(\beta = -i \wedge \alpha = \frac{1}{3}i)$  je  $\dim S = 1$

(c) v ostatních případech je  $S = \emptyset$