12. cvičení LAL2

Rieszova věta a sdružený operátor, normální operátory a matice

1. Nechť $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^\#$, kde $\mathbb{C}^3$ je unitární prostor. Najděte $\vec{z} \in \mathbb{C}^3$ tak, že pro každé $\vec{x} \in \mathbb{C}^3$ platí $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \vec{z} \rangle$.
$$\varphi(\vec{x}) = 2x_1 + ix_2 - 4x_3 \quad \text{pro každé } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

2. Nechť $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^\#$ se skalárním součinem
$$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$$
pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. Dále $\varphi(\vec{x}) = \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3$, kde $(\vec{x})_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ a kde $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$. Najděte $\vec{z} \in \mathbb{R}^3$ tak, že pro každé $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ platí $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \vec{z} \rangle$.

3. V eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou dány podprostory
$$P \equiv \begin{array}{rcl} x+y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array}, \quad Q \equiv x - y = 0.$$
Nechť $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^3$, A_P je projektor na P podle Q. Sestavte ${}^{\mathcal{X}}(A_P{}^*)$.

4. Nechť $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, kde $\mathbb{R}^3$ je eukleidovský prostor. Dále pro každé $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ je definováno $A\vec{x} = \vec{x} \times \vec{a}$.
   (a) Je $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$?
   (b) Je A diagonalizovatelný?
   (c) Je A normální?
   (d) Je A regulární?

5. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, kde $\mathbb{R}^3$ je eukleidovský prostor (tj. se standardním skalárním součinem). Nechť dále
$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
   Najděte ${}^{\mathcal{E}}(A^*)$ dvěma různými způsoby.
   Rozhodněte, zda je A:
   (a) normální,
   (b) ortogonální,
   (c) symetrický,
   (d) diagonalizovatelný.

6. Nechť $\mathcal{X}$ je ON báze $\mathcal{H}_2$ nad $\mathbb{C}$. Najděte všechna $\alpha \in \mathbb{C}$ tak, aby $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$ byl unitární.

(a) ${}^{\mathcal{X}}\!A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(b) ${}^{\mathcal{X}}\!A = \begin{pmatrix} \alpha & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \alpha \end{pmatrix}$.

7. Nechť $\mathcal{X}$ je ON báze $\mathcal{H}_3$ nad $\mathbb{C}$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_3)$, ${}^{\mathcal{X}}\!A = \begin{pmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Najděte ON bázi $\mathcal{Y}$, v níž má A diagonální tvar.

8. Nechť $\mathcal{X} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix})$ je báze unitárního prostoru $\mathbb{C}^2$, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ a ${}^{\mathcal{X}}\!A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Najděte ${}^{\mathcal{X}}(A^*)$ jak pomocí věty o matici sdruženého operátoru, tak i nějakým jiným způsobem.

9. Nechť D je operátor derivování na $\mathcal{P}_3$ se skalárním součinem

$$\langle x|y\rangle = \alpha_0\overline{\beta_0} + \alpha_1\overline{\beta_1} + \alpha_2\overline{\beta_2},$$

kde $x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$ a $y(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2$ pro každé $t \in \mathbb{C}$. Nechť $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$ je báze $\mathcal{P}_3$, kde $x_1(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t,\ x_2(t) = t^2 - 1,\ x_3(t) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t$ pro každé $t \in \mathbb{C}$. Najděte ${}^{\mathcal{X}}(D^*)$.

10. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, kde $\mathbb{R}^3$ je eukleidovský.

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

A je ortogonální a $\det A < 0$. Najděte ${}^{\mathcal{E}}\!A$.

11. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, kde $\mathbb{R}^3$ je eukleidovský.

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix},$$

A je symetrický a má 2-násobné záporné vlastní číslo. Najděte ${}^{\mathcal{E}}\!A$.