11. cvičení LAL2

Metrická geometrie

1. Nechť $P \subset \mathbb{R}^4$ se skalárním součinem definovaným

$$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + 3x_4y_4 - x_3y_4 - x_4y_3.$$

Nechť $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ a $P \equiv \begin{array}{rcl} x + y + z - u & = & 0 \\ y - 2u & = & 0 \end{array}$. Spočtěte $\rho(\vec{a}, P)$.

2. Nechť $\mathbb{R}^3$ je eukleidovský prostor, nechť jsou dány lineární variety $W_1 \equiv x + 5y + z = 3$ a $W_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}]_\lambda$. Určete $\rho(W_1, W_2)$.

3. V prostoru $\mathbb{R}^3$ se skalárním součinem $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$ je dána lineární varieta $W \equiv x + 2y - 3z = 2$ a bod $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Určete $\rho(\vec{a}, W)$.

4. Určete, jaký úhel svírají lineární variety W_1, W_2 v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$, je-li

$$W_1 \equiv \begin{array}{rcl} x + y + 3z & = & 1 \\ x - y - z & = & 2 \end{array} \quad \text{a} \quad W_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}]_\lambda.$$

5. Nechť jsou dány lineární variety W_1, W_2 v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^2$

$$W_1 \equiv x = 0, \quad W_2 \equiv 3x - 4y = -12.$$

Najděte všechny body variety W_1, které mají stejnou vzdálenost od bodu $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a od W_2.

6. V $\mathbb{R}^2$ se skalárním součinem

$$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1$$

najděte neparametrické rovnice přímky p, která splňuje

(a) $p \parallel W$, kde $W \equiv x - 2y = 3$,

(b) $\rho(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, p) = \sqrt{5}$.

7. Nechť

$$W_1 \equiv \begin{array}{rcl} 2x + y - z & = & -3 \\ x - y + 4z & = & 0 \end{array} \quad \text{a} \quad W_2 \equiv x - y = 0$$

jsou lineární variety v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$. Nalezněte parametrické rovnice všech přímek p, které procházejí bodem $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$ a $\measuredangle pW_1 = \frac{\pi}{2}$ a $\measuredangle pW_2 = \frac{\pi}{6}$.

8. Nechť W_1, W_2 jsou lineární variety v $\mathbb{R}^3$ se skalárním součinem

$$\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_3 - x_3y_1 + x_3y_3,$$

pro každé $\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right)$ a $\vec{y} = \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{smallmatrix}\right)$. Nechť

$$W_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda \quad \text{a} \quad W_2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = 1\}.$$

Spočítejte:

(a) úhel $\measuredangle W_1W_2$,

(b) vzdálenost $\rho(W_1, W_2)$.

9. Nechť $P = \left\{ \vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 - x_2 + 2x_4 = 0 \right\}$ a $Q = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$.

V $\mathbb{R}^4$ je definován skalární součin ve standardní bázi $\mathcal{E}$

$$\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 - x_1y_4 - x_4y_1.$$

Najděte ortogonální doplněk Q do P.

10. Nechť W_1 a W_2 jsou lineární variety v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$, přičemž

$$W_1 \equiv 2x - y - 2z = 1 \quad \text{a} \quad W_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \left[\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right]_\lambda.$$

(a) Určete vzdálenost W_1 a W_2.

(b) Najděte všechny přímky W obsahující bod $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ a splňující: $\measuredangle WW_1 = \frac{\pi}{2}$ a $\measuredangle WW_2 = \frac{\pi}{2}$.

11. Nechť jsou dány lineární variety W_1, W_2 v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$

$$W_1 \equiv \begin{array}{rcl} x & = & t \\ y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \quad \text{a} \quad W_2 \equiv \begin{array}{rcl} x + z & = & 0 \\ y & = & -5 \end{array}.$$

Najděte parametrické rovnice všech příček W lineárních variet W_1 a W_2, které splňují $\measuredangle WW_1 = \frac{\pi}{3}$ a $\measuredangle WW_2 = \frac{\pi}{2}$, přičemž příčka je přímka, která má neprázdný průnik s W_1 i s W_2.