10. cvičení LAL2

Lineární variety

- Je třeba prostudovat teorii ze zimních skript, a to konkrétně následující sekce z kapitoly Lineární geometrie ve skriptech Lineární algebra 1: Lineární variety, Variety jako posunuté podprostory, Vzájemná poloha variet a operace s nimi, Variety jako průniky nadrovin

1. Nechť $W \subset \mathbb{R}^2$, kde
$$W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}]_\lambda.$$
Napište směrovou rovnici W, parametrické rovnice W ve standardní bázi a neparametrické rovnice W ve standardní bázi.

2. Nechť $W \subset \mathbb{R}^2$, kde
$$W \equiv y = 2.$$
Napište parametrické rovnice W ve standardní bázi.

3. Nechť $W \subset \mathbb{R}^3$, kde
$$W \equiv \begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & 2z & = & 1, \\ 2x & + & 3y & - & z & = & -2. \end{array}$$
Najděte parametrické rovnice W ve standardní bázi.

4. Nechť $W \subset \mathbb{R}^4$, kde
$$W \equiv \begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3y & = & -4. \end{array}$$
Najděte parametrické rovnice W ve standardní bázi.

5. Rozmyslete si, jaké případy mohou nastat pro průnik dvou lineárních variet v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$.

   Ve všech příkladech zní zadání stejně: Určete vzájemnou polohu a najděte průnik lineárních variet W_1 a W_2.

   (a) Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^2$, kde
   $$W_1 \equiv \begin{array}{rcrcr} x & = & 1 & + & t, \\ y & = & -1 & + & 2t, \end{array} \qquad W_2 \equiv -2x + y = 3.$$

   (b) Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^2$, kde
   $$W_1 \equiv x + y = 1, \qquad W_2 \equiv x - y = 3.$$

   (c) Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$, kde
   $$W_1 \equiv \begin{array}{rcr} x + y + z & = & 1, \\ x - y & = & 2, \end{array} \qquad W_2 \equiv \begin{array}{rrcrcr} 2x & & + & z & = & 3, \\ & 2y & + & z & = & 1. \end{array}$$

   (d) Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$, kde
   $$W_1 \equiv x - y - 2z = 1, \qquad W_2 \equiv \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & z & = & -2, \\ 2x & - & y & & & = & 2. \end{array}$$

   (e) Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$, kde
   $$W_1 \equiv x - y - 2z = 1, \qquad W_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda.$$

(f) Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$W_1 \equiv x - y - 2z = 1, \qquad W_2 \equiv \begin{array}{rcl} x &=& 1+3t+s, \\ y &=& 1+t-s, \\ z &=& 1+t+s. \end{array}$$

(g) Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$W_1 \equiv x - y - 2z = 1, \qquad W_2 \equiv \begin{array}{rcrcrcr} x &=& 1 &+& 3t &+& s, \\ y &=& & & t &-& s, \\ z &=& & & t &+& s. \end{array}$$

(h) Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$W_1 \equiv x - y - 2z = 1, \qquad W_2 \equiv 2x - y = 2.$$

(i) Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$, kde

$$W_1 \equiv 2x + 3y + 4z = 2, \qquad W_2 \equiv \begin{array}{rcrcrcr} x &=& 1 &+& t, & & \\ y &=& 4 &-& t &-& 2s, \\ z &=& -3 &+& t &+& 3s. \end{array}$$

6. Nechť W_1, W_2, W_3 jsou lineární variety v $\mathbb{R}^4$ zadané následovně:

$$W_1 = [\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]_\lambda, \qquad W_2 \equiv \begin{array}{rcrcrcr} x &=& 1 &+& t &-& s, \\ y &=& 1 &+& t &-& s, \\ z &=& 1 &+& t &-& s, \\ u &=& 1 &+& t &-& s, \end{array}$$

$$W_3 \equiv \begin{array}{rcrcrcr} x &-& y & & &=& 1, \\ x & & &-& z &=& 2. \end{array}$$

Určete, o jaké lineární variety se jedná. Najděte vzájemnou polohu W_1 a W_2 a průnik $W_1 \cap W_3$.

7. Nechť W_1, W_2, W_3 jsou lineární variety v $\mathbb{R}^4$ zadané následovně:

W_1 je nejmenší lineární varieta obsahující vektory $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $W_2 \equiv \begin{array}{rcrcrcr} x &=& 1 &+& t &-& 2s, \\ y &=& 1 &+& t &-& s, \\ z &=& 1 &+& t &-& s, \\ u &=& 1 &+& t &-& s, \end{array}$

$$W_3 \equiv \begin{array}{rcrcrcrcr} x &-& y & & &+& u &=& 0, \\ x & & &-& z & & &=& 0. \end{array}$$

Určete, o jaké lineární variety se jedná. Najděte vzájemnou polohu W_1 a W_2 a průnik $W_2 \cap W_3$.

8. Nechť W_1, W_2 jsou lineární variety v prostoru $\mathbb{R}^4$ zadané následovně:

W_1 je nejmenší lineární varieta obsahující vektory $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $W_2 \equiv \begin{array}{rcrcrcr} x &=& 1 &+& t &-& 2s, \\ y &=& 1 &+& t &-& s, \\ z &=& 1 &+& t &-& s, \\ u &=& & & t &-& s. \end{array}$

Určete, o jaké lineární variety se jedná. Najděte vzájemnou polohu W_1 a W_2 a průnik $W_1 \cap W_2$.