Praktická část zkouškové písemky 2.6.2020 Jméno:

Snažte se využívat znalosti z teorie ke zjednodušení výpočtu. Tam, kde teorii využíváte, uveďte krátký komenář.

1. Nechť $\mathbb{R}^3$ je eukleidovský prostor, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$,

$$^{\mathcal{E}}B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$:

   (a) Najděte vlastní čísla B.
   (b) Rozhodněte, zda B je diagonalizovatelný.
   (c) Rozhodněte, zda B je $i)$ normální, $ii)$ ortogonální, $iii)$ symetrický.
   (d) Najděte ON bázi prostoru $\mathbb{R}^3$ z vlastních vektorů B, pokud existuje.

2. Nechť Q je kvadratická forma v $\mathbb{R}^4$, která má ve standardní bázi tvar:

$$Q(\vec{x}) = x_2^2 - x_4^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_4.$$

   Najděte:

   (a) signaturu Q,
   (b) charakter Q,
   (c) nulprostor Q,
   (d) polární bázi Q.
   (e) Nechť $\mathbb{A} = {}^{\mathcal{E}}Q$. Určete počet kladných vlastních čísel a počet záporných vlastních čísel matice $\mathbb{A}$. Je $\mathbb{A}$ diagonalizovatelná?

3. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^3$, kde $P \equiv 2x - 2y + z = 0$, přičemž v $\mathbb{R}^3$ je definován skalární součin ve standardní bázi

$$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

   Najděte:

   (a) OG bázi P,
   (b) OG doplněk P do $\mathbb{R}^3$,
   (c) OG průmět $\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{smallmatrix}\right)$ do P, tj. $\vec{x}_P$.

4. Nechť

$$W_1 \equiv \begin{array}{rcl} 2x + y - z & = & -3 \\ x - y + z & = & 0 \end{array} \quad \text{a} \quad W_2 \equiv x + y = 8$$

   jsou lineární variety v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$.

   (a) Určete vzdálenost bodu $\vec{a} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ a variety W_2, tj. $\rho(\vec{a}, W_2)$.
   (b) Nalezněte parametrické rovnice všech přímek p, které procházejí bodem $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\measuredangle pW_1 = \frac{\pi}{2}$ a $\measuredangle pW_2 = \frac{\pi}{4}$.