Cvičení LAA2 – část A

Duální báze

Z teorie je třeba znát větu o duální bázi: Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ je báze prostoru V nad tělesem T. Označme $\mathcal{X}^\# = (x_1^\#, x_2^\#, \ldots, x_n^\#)$. Pak $\mathcal{X}^\#$ je báze prostoru $V^\#$ a nazývá se duální báze k $\mathcal{X}$. Dále pro každé $\varphi \in V^\#$ platí:

$$(\varphi)_{\mathcal{X}^\#} = \begin{pmatrix} \varphi(\vec{x}_1) \\ \varphi(\vec{x}_2) \\ \vdots \\ \varphi(\vec{x}_n) \end{pmatrix}.$$

1. **[cvičení]** Je $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^\#$?
$$\varphi(\vec{x}) = 2x_1 + x_2 - x_3,$$
kde $\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right)$. Pokud ano, najděte $(\varphi)_{\mathcal{E}^\#}$.

2. Je $\varphi \in \mathcal{P}^\#$?
$$\varphi(x) = x(2).$$

3. **[cvičení]** Je $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^\#$?
$$\varphi(\vec{x}) = 3x_1 - x_2 + 2ix_3,$$
kde $\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right)$. Pokud ano, najděte $(\varphi)_{\mathcal{X}^\#}$, je-li $\mathcal{X} = (\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{smallmatrix}\right))$.

4. Nechť $\varphi \in \mathcal{P}_4^\#$.
$$\varphi(x) = 2\alpha_0 + \beta_1 - \beta_2 + \beta_3 + 2\alpha_3 + x(-1),$$
kde $(\forall t \in \mathbb{C})(x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3)$ a $(x)_{\mathcal{X}} = \left(\begin{smallmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{smallmatrix}\right)$ a $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ je definována
$$(\forall t \in \mathbb{C})(x_1(t) = 1 + t,\ x_2(t) = 1 - t,\ x_3(t) = t^2 - t^3,\ x_4(t) = t^2 + t^3).$$
Najděte $(\varphi)_{\mathcal{E}^\#}$ a $(\varphi)_{\mathcal{X}^\#}$.

5. **[cvičení]** Nechť $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^\#$. $(\varphi)_{\mathcal{E}^\#} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$. Najděte $(\varphi)_{\mathcal{X}^\#}$, je-li $\mathcal{X} = (\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right))$.

6. **[cvičení]** Nechť $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^\#$. $(\varphi)_{\mathcal{X}^\#} = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{smallmatrix}\right)$, kde $\mathcal{X} = (\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right))$. Najděte $(\varphi)_{\mathcal{E}^\#}$.

7. Nechť $\varphi \in (\mathcal{P}_2)^\#$. $\mathcal{X} = (x_1, x_2)$ a $\mathcal{Y} = (y_1, y_2)$ jsou báze $\mathcal{P}_2$, kde
$$\begin{aligned} &\forall t \in \mathbb{C} \\ &\qquad x_1(t) = 1 + t \\ &\qquad x_2(t) = 1 - t \\ &\qquad y_1(t) = 1 - 2t \\ &\qquad y_2(t) = 3 + 2t. \end{aligned}$$
Nechť $(\varphi)_{\mathcal{X}^\#} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$. Najděte $(\varphi)_{\mathcal{Y}^\#}$.

8. **[cvičení]** Nechť $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{C}^3)^\#$.
$$(\varphi_1)_{\mathcal{E}^\#} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, (\varphi_2)_{\mathcal{X}^\#} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \varphi_3(\vec{x}) = x_1 + 2x_2 - 2x_3,$$
kde $\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right)$ a $\mathcal{X} = (\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right))$. Jsou $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ LN?

9. Nechť $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \in (\mathcal{P})^\#$. Pro každé $x \in \mathcal{P}$ platí

$$\varphi_1(x) = x(1) - x(0),\ \varphi_2(x) = x(2),\ \varphi_3(x) = 2x(1) - 3x(2),\ \varphi_4(x) = 2x(0) + x(1) + 4x(2).$$

   Jsou $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ LN?

10. Nechť $\varphi \in (\mathcal{P}_3)^\#$. Pro každé $x \in \mathcal{P}_3$ platí $\varphi(x) = x(i) - x(0)$. Řešte $\varphi(x) = i - 1$.

11. Nechť $\varphi_1, \varphi_2 \in (\mathbb{R}^3)^\#$.

$$\varphi_1(\vec{x}) = x_1 - x_2,\ (\varphi_2)_{\mathcal{X}^\#} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

   kde $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ a $\mathcal{X} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$. Najděte bázi průniku jader funkcionálů.

Domácí úlohy

1. Dopočítejte úlohy, které jsme na cvikách neřešili.

2. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a nechť $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ jsou báze V. Najděte vztah matice přechodu od báze $\mathcal{X}$ k bázi $\mathcal{Y}$, tj. ${}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}}$, a matice přechodu od báze $\mathcal{X}^\#$ k bázi $\mathcal{Y}^\#$, tj. ${}^{\mathcal{X}^\#}I^{\mathcal{Y}^\#}$.