

## Cvičení LAA9

### Hermitovské a kvadratické formy

1. Necht  $Q$  je kvadratická forma ve  $V_3$  nad  $\mathbb{R}$  a  $\mathcal{X}$  je báze  $V_3$ . Najděte signaturu a polární bázi  $Q$  a nulprostor  $Q$ . Určete charakter  $Q$  (PD, PSD, ND, NSD, indefinitní). Dále určete,

zda jde o regulární či singulární formu. Pro  $\vec{x} \in V_3$ ,  $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ , definujeme

(a)  $Q(\vec{x}) = \alpha_1^2 + 3\alpha_2^2 + 4\alpha_3^2 - 2\alpha_1\alpha_2 + 4\alpha_1\alpha_3 - 2\alpha_2\alpha_3$ ,

(b)  $Q(\vec{x}) = \alpha_1^2 - 2\alpha_2^2 + 4\alpha_1\alpha_2$ .

2. Necht  $Q$  je kvadratická forma ve  $V_4$  nad  $\mathbb{R}$  a  $\mathcal{X}$  je báze  $V_4$ . Najděte polární bázi  $Q$  a nulprostor  $Q$ , je-li

$${}^x Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Necht  $h$  je hermitovská forma v  $\mathbb{R}^3$ , která má ve standardní bázi tvar  $h(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3$ . Necht  $Q$  je diagonála  $h$ . Najděte  $\mathcal{X}$  bázi  $\mathbb{R}^3$  tak, aby

(a)  ${}^x Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ ,

(b)  ${}^x Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

4. Necht  $Q$  je kvadratická forma ve  $V_3$  nad  $\mathbb{R}$  a  $\mathcal{X}$  je báze  $V_3$ . Najděte nulprostor  $Q$ . Pro

$\vec{x} \in V_3$ ,  $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$  definujeme  $Q(\vec{x}) = \alpha_1^2 + 3\alpha_2^2 - 2\alpha_1\alpha_2 - 4\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3$ .

### Domácí úkoly

1. Necht je dána kvadratická forma v  $\mathbb{C}^2$ . Najděte signaturu a polární bázi  $Q$ .

$$Q(\vec{x}) = |x_1|^2 - i\bar{x}_1x_2 + ix_1\bar{x}_2 - |x_2|^2.$$

2. Necht je dána kvadratická forma v  $\mathbb{C}^3$ . Najděte signaturu a polární bázi  $Q$ .

$$Q(\vec{x}) = 2|x_1|^2 + x_1\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_3 - ix_2\bar{x}_3 + ix_3\bar{x}_2.$$