

# Cvičení LAA8

## Hermitovské a kvadratické formy

1. Necht  $h(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2$ , kde  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  a  $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ . Dokažte, že  $h$  je hermitovská forma na  $\mathbb{R}^2$ .
2. Necht  $h(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2}$ , kde  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  a  $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ . Dokažte, že  $h$  je hermitovská forma na  $\mathbb{C}^2$ .
3. Necht  $h(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}^T \mathbb{A} \vec{y}$ , kde  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ ,  $\mathbb{A} = \mathbb{A}^T$ . Dokažte, že  $h$  je hermitovská forma na  $\mathbb{R}^n$ .
4. Necht  $h(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}^T \mathbb{A} \overline{\vec{y}}$ , kde  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$  a  $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ ,  $\mathbb{A} = \mathbb{A}^H$ . Dokažte, že  $h$  je hermitovská forma na  $\mathbb{C}^n$ .
5. Necht  $h : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$ , kde pro každé  $x, y \in \mathcal{P}$  platí

$$h(x, y) = x(0)\overline{y(1)} + x(1)\overline{y(0)}.$$

Dokažte, že  $h$  je hermitovská forma.

6. Necht  $V$  je reálný vektorový prostor funkcí definovaných a spojitých na intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ . Dokažte, že následující zobrazení je hermitovská forma na  $V$ .

$$h(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt \quad \text{pro každé } f, g \in V.$$

7. Necht  $V_n$  je vektorový prostor nad tělesem  $\mathbb{R}$  a  $\mathcal{X}$  je báze  $V_n$ . Necht  $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$  splňuje  $\mathbb{A} = \mathbb{A}^T$ . Necht  $h(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x})_{\mathcal{X}}^T \mathbb{A} (\vec{y})_{\mathcal{X}}$ . Dokažte, že  $h$  je hermitovská forma.
8. Necht  $V_n$  je vektorový prostor nad tělesem  $\mathbb{C}$  a  $\mathcal{X}$  je báze  $V_n$ . Necht  $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$  splňuje  $\mathbb{A} = \mathbb{A}^H$ . Necht  $h(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x})_{\mathcal{X}}^T \mathbb{A} \overline{(\vec{y})_{\mathcal{X}}}$ . Dokažte, že  $h$  je hermitovská forma.
9. Necht  $Q$  je kvadratická forma v  $\mathbb{R}^3$ . Najděte její poláru  $h$ , matici ve standardní bázi  ${}^{\mathcal{E}}Q$ , polární bázi, signaturu, charakter a nulprostor. Pro  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  definujeme

(a)  $Q(\vec{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$ ,

(b)  $Q(\vec{x}) = x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_1x_2$ ,

(c)  $Q(\vec{x}) = 9x_2^2 + 9x_3^2 + 12x_1x_2 + 12x_1x_3 - 6x_2x_3$ ,

(d)  $Q(\vec{x}) = -x_3^2 - x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ ,

(e)  $Q(\vec{x}) = x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_2x_3$ .

## Domácí úkoly

1. Necht  $h : \mathcal{P}_3 \times \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathbb{C}$ , kde pro každé  $x, y \in \mathcal{P}_3$  platí

$$h(x, y) = x(0)\overline{y(1)} + x(1)\overline{y(0)}.$$

Najděte hermitovskou matici, tj.  $\mathbb{A} = \mathbb{A}^H$  tak, aby  $h(x, y) = ((x)_{\mathcal{E}})^T \mathbb{A} \overline{(y)_{\mathcal{E}}}$ .