

## Cvičení LAA13

### Rieszova věta a sdružený operátor, normální operátory a matice

1. Necht  $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^\#$ , kde  $\mathbb{C}^3$  je unitární prostor. Najděte  $\vec{z} \in \mathbb{C}^3$  tak, že pro každé  $\vec{x} \in \mathbb{C}^3$  platí  $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \vec{z} \rangle$ .

$$\varphi(\vec{x}) = 2x_1 + ix_2 - 4x_3 \quad \text{pro každé } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

2. Necht  $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^\#$  se skalárním součinem

$$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$$

pro každé  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ . Dále  $\varphi(\vec{x}) = \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3$ , kde  $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$

a kde  $\mathcal{X} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ . Najděte  $\vec{z} \in \mathbb{R}^3$  tak, že pro každé  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$  platí  $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \vec{z} \rangle$ .

3. Necht  $\mathcal{X} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \right)$  je báze unitárního prostoru  $\mathbb{C}^2$ ,  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$  a  ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ . Najděte  ${}^{\mathcal{X}}(A^*)$  jak pomocí věty o matici sdruženého operátoru, tak i nějakým jiným způsobem.

4. V eukleidovském prostoru  $\mathbb{R}^3$  jsou dány podprostory

$$P \equiv \begin{matrix} x + y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{matrix}, \quad Q \equiv x - y = 0.$$

Necht  $\mathcal{X} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$  je báze  $\mathbb{R}^3$ ,  $A_P$  je projektor na  $P$  podle  $Q$ . Sestavte  ${}^{\mathcal{X}}(A_P^*)$ .

5. Necht  $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ , kde  $\mathbb{R}^3$  je eukleidovský prostor. Dále pro každé  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$  je definováno  $A\vec{x} = \vec{x} \times \vec{a}$ .

- Je  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ ?
- Je  $A$  diagonalizovatelný?
- Je  $A$  normální?
- Je  $A$  regulární?

6. Necht  $D$  je operátor derivování na  $\mathcal{P}_3$  se skalárním součinem

$$\langle x | y \rangle = \alpha_0\bar{\beta}_0 + \alpha_1\bar{\beta}_1 + \alpha_2\bar{\beta}_2,$$

kde  $x(t) = \alpha_0 + \alpha_1t + \alpha_2t^2$  a  $y(t) = \beta_0 + \beta_1t + \beta_2t^2$  pro každé  $t \in \mathbb{C}$ . Necht  $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$  je báze  $\mathcal{P}_3$ , kde  $x_1(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t$ ,  $x_2(t) = t^2 - 1$ ,  $x_3(t) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t$  pro každé  $t \in \mathbb{C}$ . Najděte  ${}^{\mathcal{X}}(D^*)$ .

7. Necht  $\mathcal{X}$  je ON báze  $\mathcal{H}_2$  nad  $\mathbb{C}$ . Najděte všechna  $\alpha \in \mathbb{C}$  tak, aby  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$  byl unitární.

$$(a) \quad {}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(b) \mathcal{X}A = \begin{pmatrix} \alpha & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \alpha \end{pmatrix}.$$

8. Necht  $\mathcal{X}$  je ON báze  $\mathcal{H}_3$  nad  $\mathbb{C}$ ,  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_3)$ ,  $\mathcal{X}A = \begin{pmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ . Najděte ON bázi  $\mathcal{Y}$ , v níž má  $A$  diagonální tvar.

9. Necht  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ , kde  $\mathbb{R}^3$  je eukleidovský.

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$A$  je ortogonální a  $\det A < 0$ . Najděte  $\mathcal{E}A$ .

10. Necht  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ , kde  $\mathbb{R}^3$  je eukleidovský.

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$A$  je symetrický a má 2-násobné záporné vlastní číslo. Najděte  $\mathcal{E}A$ .