Cvičení LAA9

Hermitovské a kvadratické formy

1. Nechť Q je kvadratická forma v $\mathbb{R}^3$. Najděte její poláru h, matici ve standardní bázi ${}^{\mathcal{E}}Q$, polární bázi, signaturu, charakter a nulprostor. Pro $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ definujeme
   (a) $Q(\vec{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$,
   (b) $Q(\vec{x}) = x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_1x_2$,
   (c) $Q(\vec{x}) = 9x_2^2 + 9x_3^2 + 12x_1x_2 + 12x_1x_3 - 6x_2x_3$,
   (d) $Q(\vec{x}) = -x_3^2 - x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$,
   (e) $Q(\vec{x}) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.
2. Nechť Q je kvadratická forma ve V_3 nad $\mathbb{R}$ a $\mathcal{X}$ je báze V_3. Najděte signaturu a polární bázi Q a nulprostor Q. Určete charakter Q (PD, PSD, ND, NSD, indefinitní). Dále určete, zda jde o regulární či singulární formu. Pro $\vec{x} \in V_3,\ (\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$, definujeme
   (a) $Q(\vec{x}) = \alpha_1^2 + 3\alpha_2^2 + 4\alpha_3^2 - 2\alpha_1\alpha_2 + 4\alpha_1\alpha_3 - 2\alpha_2\alpha_3$,
   (b) $Q(\vec{x}) = \alpha_1^2 - 2\alpha_2^2 + 4\alpha_1\alpha_2$.
3. Nechť Q je kvadratická forma ve V_4 nad $\mathbb{R}$ a $\mathcal{X}$ je báze V_3. Najděte polární bázi Q a nulprostor Q, je-li
$$ {}^{\mathcal{X}}Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}. $$
4. Nechť h je hermitovská forma v $\mathbb{R}^3$, která má ve standardní bázi tvar $h(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3$. Nechť Q je diagonála h. Najděte $\mathcal{X}$ bázi $\mathbb{R}^3$ tak, aby
   (a) ${}^{\mathcal{X}}Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$,
   (b) ${}^{\mathcal{X}}Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
5. Nechť Q je kvadratická forma ve V_3 nad $\mathbb{R}$ a $\mathcal{X}$ je báze V_3. Najděte nulprostor Q. Pro $\vec{x} \in V_3,\ (\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ definujeme $Q(\vec{x}) = \alpha_1^2 + 3\alpha_2^2 - 2\alpha_1\alpha_2 - 4\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3$.

Domácí úkoly

1. Nechť je dána kvadratická forma v $\mathbb{C}^2$. Najděte signaturu a polární bázi Q.
$$ Q(\vec{x}) = |x_1|^2 - \mathrm{i}\overline{x_1}x_2 + \mathrm{i}x_1\overline{x_2} - |x_2|^2. $$
2. Nechť je dána kvadratická forma v $\mathbb{C}^3$. Najděte signaturu a polární bázi Q.
$$ Q(\vec{x}) = 2|x_1|^2 + x_1\overline{x_3} + \overline{x_1}x_3 - \mathrm{i}x_2\overline{x_3} + \mathrm{i}x_3\overline{x_2}. $$