

Cvičení LAA8

Hermitovské a kvadratické formy

1. Nechť $h(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2$, kde $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ a $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Dokažte, že h je hermitovská forma na \mathbb{R}^2 .
2. Nechť $h(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2}$, kde $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ a $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Dokažte, že h je hermitovská forma na \mathbb{C}^2 .
3. Nechť $h(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}^T \mathbb{A} \vec{y}$, kde $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbb{A} = \mathbb{A}^T$. Dokažte, že h je hermitovská forma na \mathbb{R}^n .
4. Nechť $h(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}^T \mathbb{A} \overline{\vec{y}}$, kde $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$ a $\mathbb{A} = \mathbb{A}^H$. Dokažte, že h je hermitovská forma na \mathbb{C}^n .
5. Nechť $h : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$, kde pro každé $x, y \in \mathcal{P}$ platí

$$h(x, y) = x(0)\overline{y(1)} + x(1)\overline{y(0)}.$$

Dokažte, že h je hermitovská forma.

6. Nechť V je reálný vektorový prostor funkcí definovaných a spojitých na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Dokažte, že následující zobrazení je hermitovská forma na V .

$$h(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt \quad \text{pro každé } f, g \in V.$$

7. Nechť V_n je vektorový prostor nad tělesem \mathbb{R} a \mathcal{X} je báze V_n . Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ splňuje $\mathbb{A} = \mathbb{A}^T$. Nechť $h(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x})_{\mathcal{X}}^T \mathbb{A} (\vec{y})_{\mathcal{X}}$. Dokažte, že h je hermitovská forma.
8. Nechť V_n je vektorový prostor nad tělesem \mathbb{C} a \mathcal{X} je báze V_n . Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ splňuje $\mathbb{A} = \mathbb{A}^H$. Nechť $h(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x})_{\mathcal{X}}^T \mathbb{A} \overline{(\vec{y})_{\mathcal{X}}}$. Dokažte, že h je hermitovská forma.
9. Nechť Q je kvadratická forma v \mathbb{R}^3 . Najděte její poláru h , matici ve standardní bázi ${}^{\mathcal{E}}Q$, polární bázi, signaturu, charakter a nulprostor. Pro $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ definujeme

(a) $Q(\vec{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$,

(b) $Q(\vec{x}) = x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_1x_2$,

(c) $Q(\vec{x}) = 9x_2^2 + 9x_3^2 + 12x_1x_2 + 12x_1x_3 - 6x_2x_3$,

(d) $Q(\vec{x}) = -x_3^2 - x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$,

(e) $Q(\vec{x}) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

Domácí úkoly

1. Nechť $h : \mathcal{P}_3 \times \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathbb{C}$, kde pro každé $x, y \in \mathcal{P}_3$ platí

$$h(x, y) = x(0)\overline{y(1)} + x(1)\overline{y(0)}.$$

Najděte hermitovskou matici, tj. $\mathbb{A} = \mathbb{A}^H$ tak, aby $h(x, y) = ((x)_{\mathcal{E}})^T \mathbb{A} \overline{(y)_{\mathcal{E}}}$.