Cvičení LAA5

Vlastní čísla a vlastní vektory matic

1. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory následujících matic. Rozhodněte o jejich diagonalizovatelnosti. Jsou-li diagonalizovatelné, najděte regulární $\mathbb{X}$ a diagonální $\mathbb{D}$ tak, aby $\mathbb{A} = \mathbb{X}\mathbb{D}\mathbb{X}^{-1}$. Ověřte, že matice jsou kořeny svých charakteristických polynomů.

   (a)
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix},$$

   (b)
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

   (c)
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -20 & 9 & -18 \\ 6 & -5 & 6 \\ 24 & -12 & 22 \end{pmatrix}.$$

2. Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je regulární. Vyšetřete vztah:

   (a) spekter $\mathbb{A}$ a $\mathbb{A}^{-1}$,

   (b) algebraických násobností vlastních čísel $\mathbb{A}$ a $\mathbb{A}^{-1}$,

   (c) geometrických násobností vlastních čísel $\mathbb{A}$ a $\mathbb{A}^{-1}$,

   (d) diagonalizovatelnosti $\mathbb{A}$ a $\mathbb{A}^{-1}$.

3. Je $\mathbb{A}^{-1}$ diagonalizovatelná matice? Pokud ano, najděte regulární $\mathbb{X}$ a diagonální $\mathbb{D}$ tak, aby $\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{X}\mathbb{D}\mathbb{X}^{-1}$.
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -20 & 9 & -18 \\ 6 & -5 & 6 \\ 24 & -12 & 22 \end{pmatrix}.$$

4. Nechť jsou dány matice $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Jaký je vztah mezi vlastními čísly a vlastními vektory matic:

   (a) $\mathbb{A}$ a $\mathbb{A}^2$,

   (b) $\mathbb{A}$ a $\mathbb{A} + \alpha\mathbb{I}$, kde $\alpha \in \mathbb{C}$,

   (c) $\mathbb{A}$ a $\mathbb{A}^T$,

   (d) $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ a $\mathbb{A} + \mathbb{B}$,

   (e) $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ a $\mathbb{A}\mathbb{B}$,

   (f) $\mathbb{A}\mathbb{B}$ a $\mathbb{B}\mathbb{A}$ pro $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ regulární.

Domácí úloha

1. Naprogramujte Cramerovo pravidlo a výpočet inverzní matice pomocí adjungované (2 týdny).

2. Pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ je matice $\mathbb{A}$ diagonalizovatelná?
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Najděte $\mathbb{A}^{10}$ z příkladu 1.(a), aniž byste ji opravdu samu se sebou opakovaně násobili.