

Cvičení LAA11

Skalární součin

1. V unitárním prostoru \mathbb{C}^2 najděte dvě různé ON báze.

2. V eukleidovském prostoru \mathbb{R}^4 je dán podprostor $P = \left[\left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 5 \\ -12 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{array} \right) \right]_{\lambda}$.

Najděte ON bázi P . (a) Bez použití Gram-Schmidta a (b) s použitím Gram-Schmidta.

3. V eukleidovském prostoru \mathbb{R}^4 doplňte vektory $\left(\frac{1}{2} \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right), \frac{1}{6} \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -5 \end{array} \right) \right)$ na ON bázi.

(a) Bez použití Gram-Schmidta a (b) s použitím Gram-Schmidta.

4. Nechť $P = \left[\left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -5 & 3 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 3 & 2 \\ 8 & -7 \end{array} \right) \right]_{\lambda} \subset \mathbb{R}^{2,2}$. Najděte OG bázi obsahující vektor $z \left[\left(\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{array} \right) \right]_{\lambda}$, je-li dán skalární součin $\langle \mathbb{A} | \mathbb{B} \rangle = \sum_{i,j=1}^2 \mathbb{A}_{ij} \mathbb{B}_{ij}$.

5. Najděte OG bázi $P \subset \mathbb{R}^3$, kde $P \equiv 2x - 2y + z = 0$, je-li v \mathbb{R}^3 definován skalární součin ve standardní bázi

$$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_3,$$

tak, aby báze obsahovala vektor $z \in Q \equiv x - y - z = 0$.

6. Nechť $P = \left[\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{array} \right) \right]_{\lambda} \subset \mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem. Najděte P^{\perp} .

Najděte dvěma různými způsoby OG průmět $\vec{x} = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right)$ do P .

7. Nechť $P \subset \mathbb{R}^3$ se skalárním součinem

$$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 + 6x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2.$$

Najděte ON bázi P^{\perp} , je-li $P \equiv x = 0$.

8. Nechť $P, Q \subset \mathbb{R}^4$, kde \mathbb{R}^4 je eukleidovský prostor. Najděte Q^{\perp} do P , je-li $P = \left[\left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right) \right]_{\lambda}$

a $Q = \left[\left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{array} \right) \right]_{\lambda}$.

9. Nechť \mathcal{P}_3 je prostor polynomů stupně maximálně 2 se skalárním součinem

(a) $\langle x | y \rangle = \alpha_0 \bar{\beta}_0 + \alpha_1 \bar{\beta}_1 + \alpha_2 \bar{\beta}_2,$

(b) $\langle x | y \rangle = \alpha_0 \bar{\beta}_0 - \alpha_0 \bar{\beta}_1 - \alpha_1 \bar{\beta}_0 + 2\alpha_1 \bar{\beta}_1 + 4\alpha_2 \bar{\beta}_2,$

kde $x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$ a $y(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2$ pro každé $t \in \mathbb{C}$. Najděte jeho ON bázi v prvním a druhém případě.

Domácí úkoly

1. Necht' je v prostoru matic $\mathbb{R}^{2,2}$ dán skalární součin s maticí $\varepsilon_Q = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Řešte

úlohu 4. s takto zadaným skalárním součinem.

2. Necht' $P = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$ a $Q = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$. V \mathbb{R}^4 je definován skalární

součin ve standardní bázi \mathcal{E}

$$\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 - x_1y_4 - x_4y_1.$$

Najděte ON bázi Q^\perp do P .

3. Necht' $P \subset \subset \mathbb{R}^4$, kde $P \equiv x - 2y + z = 0$. V \mathbb{R}^4 je definován skalární součin

$$\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 + 6x_3y_3 + x_4y_4 - x_1y_4 - x_4y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2,$$

kde $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ a $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$. Najděte

(a) P^\perp ,

(b) \vec{a}_P , je-li $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4. Vytvořte program pro ortogonalizaci vektorů pomocí Gramova-Schmidtova ortogonalizačního procesu v prostoru \mathbb{R}^n . Necht' uživatel sám zadává, jak vypadá skalární součin (např. pomocí matice odpovídající kvadratické formy ve standardní bázi). Program musí samozřejmě kontrolovat, zda jde o dobře zadaný skalární součin (vhodné je využít Sylvesterova kritéria). A dále samozřejmě uživatel zadává, jaké vektory chce ortogonalizovat (libovolný počet mezi 1 a n). Program musí kontrolovat jejich LN. (2 týdny)