Cvičení LAA10

Kvadratické formy a skalární součin

1. Nechť Q je kvadratická forma ve V_3 nad $\mathbb{R}$ a $\mathcal{X}$ je báze V_3. Najděte nulprostor Q. Pro $\vec{x} \in V_3,\ (\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ definujeme $Q(\vec{x}) = \alpha_1^2 + 3\alpha_2^2 - 2\alpha_1\alpha_2 - 4\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3$.

2. Nechť Q je kvadratická forma v $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^3$. Q má v bázi $\mathcal{X}$ tvar
$$Q(\vec{x}) = \alpha_3^2 - 2\alpha_1\alpha_3 - 2\alpha_2\alpha_3.$$
Zjistěte, pro která $\alpha \in \mathbb{R}$ leží $\begin{pmatrix} 1 \\ 2+\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ v nulprostoru Q.

3. Nechť Q je kvadratická forma ve V_3 nad $\mathbb{R}$, která má v bázi $\mathcal{X}$ tvar
$$Q(\vec{x}) = 5\alpha_1^2 + 5\alpha_2^2 + \alpha_3^2 + 2\alpha\alpha_1\alpha_2 + 4\alpha_1\alpha_3 + 4\alpha_2\alpha_3.$$
Určete charakter formy Q v závislosti na $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. Nechť Q je kvadratická forma ve V_3 nad $\mathbb{R}$, která má v bázi $\mathcal{X}$ tvar
$$Q(\vec{x}) = \alpha\alpha_1^2 - 2\alpha_2^2 + (\alpha+1)\alpha_3^2 - 2\alpha\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha\alpha_1\alpha_3 + 2\alpha_2\alpha_3.$$
Najděte $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, aby
   (a) Q byla PD,
   (b) Q byla singulární.

5. V $\mathbb{R}^2$ definujeme zobrazení $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1$, kde $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ a $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Je to skalární součin?

6. V $\mathcal{P}$ definujeme $\langle x | y \rangle = x(0)\overline{y(0)} + x(1)\overline{y(1)} + x(2)\overline{y(2)}$. Je to skalární součin?

7. Nechť V je reálný vektorový prostor funkcí definovaných a spojitých na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Dokažte, že následující zobrazení je skalární součin na V.
$$h(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt \quad \text{pro každé } f, g \in V.$$

8. V $\mathbb{R}^3$ definujeme skalární součin $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 4x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1$. Najděte všechny vektory kolmé na $\vec{e}_1$.

9. V unitárním prostoru $\mathbb{C}^2$ najděte dvě různé ON báze.

Domácí úkoly

1. Nechť Q je kvadratická forma v $\mathbb{R}^3$.
$$Q(\vec{x}) = (\alpha+1)x_1^2 + (\alpha+2)x_2^2 + x_3^2 - 2\alpha x_1x_2 - 2x_1x_3,$$
kde $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.
V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$

(a) určete signaturu,

(b) vyšetřete nulprostor,

(c) najděte polární bázi $\mathcal{A}$ formy Q tak, aby

$$^{\mathcal{A}}Q = \left(\begin{smallmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right).$$