Kontrolní test 2 27. 5. 2019 Jméno:

Snažte se využívat znalosti z teorie ke zjednodušení výpočtu. Tam, kde teorii využíváte, uveďte krátký komenář.

1. Nechť Q je kvadratická forma v $\mathbb{R}^4$, $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^4$. Najděte nulprostor Q, je-li:

$$^{\mathcal{X}}Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Nechť $P = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda \subset\subset \mathbb{R}^3$ se skalárním součinem, jehož diagonála splňuje:

$$^{\mathcal{E}}Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Najděte $P^\perp$ do $\mathbb{R}^3$.

   (b) Spočítejte vzdálenost $\rho(\vec{a}, P)$, kde $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$, kde $\mathbb{C}^3$ je unitární prostor (tj. se standardním skalárním součinem). Nechť dále

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   (a) V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{C}$ určete, kdy je A normální, resp. unitární, resp. hermitovský.

   (b) Pro jaká $\alpha \in \mathbb{C}$ je A diagonalizovatelný? Vysvětlete.