Cvičení LAA9

Hermitovské a kvadratické formy

1. Nechť Q je kvadratická forma ve V_3 nad $\mathbb{R}$ a $\mathcal{X}$ je báze V_3. Najděte signaturu a polární bázi Q. Určete charakter Q (PD, PSD, ND, NSD, indefinitní). Dále určete, zda jde o regulární či singulární formu. Pro $\vec{x} \in V_3$, $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$, definujeme

   (a) $Q(\vec{x}) = \alpha_1^2 + 3\alpha_2^2 + 4\alpha_3^2 - 2\alpha_1\alpha_2 + 4\alpha_1\alpha_3 - 2\alpha_2\alpha_3$,

   (b) $Q(\vec{x}) = \alpha_1^2 - 2\alpha_2^2 + 4\alpha_1\alpha_2$.

2. Nechť Q je kvadratická forma ve V_4 nad $\mathbb{R}$ a $\mathcal{X}$ je báze V_3. Najděte polární bázi Q, je-li

$$^{\mathcal{X}}Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Nechť h je hermitovská forma v $\mathbb{R}^3$, která má ve standardní bázi tvar $h(\vec{x},\vec{y}) = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3$. Nechť Q je diagonála h. Najděte $\mathcal{X}$ bázi $\mathbb{R}^3$ tak, aby

   (a) $^{\mathcal{X}}Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$,

   (b) $^{\mathcal{X}}Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Nechť Q je kvadratická forma ve V_3 nad $\mathbb{R}$ a $\mathcal{X}$ je báze V_3. Najděte nulprostor Q. Pro $\vec{x} \in V_3$, $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ definujeme $Q(\vec{x}) = \alpha_1^2 + 3\alpha_2^2 - 2\alpha_1\alpha_2 - 4\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3$.

5. Nechť Q je kvadratická forma v $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^3$. Q má v bázi $\mathcal{X}$ tvar

$$Q(\vec{x}) = \alpha_3^2 - 2\alpha_1\alpha_3 - 2\alpha_2\alpha_3.$$

   Zjistěte, pro která $\alpha \in \mathbb{R}$ leží $\begin{pmatrix} 1 \\ 2+\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ v nulprostoru Q.

6. Nechť Q je kvadratická forma ve V_3 nad $\mathbb{R}$, která má v bázi $\mathcal{X}$ tvar

$$Q(\vec{x}) = 5\alpha_1^2 + 5\alpha_2^2 + \alpha_3^2 + 2\alpha\alpha_1\alpha_2 + 4\alpha_1\alpha_3 + 4\alpha_2\alpha_3.$$

   Určete charakter formy Q v závislosti na $\alpha \in \mathbb{R}$.

7. Nechť Q je kvadratická forma ve V_3 nad $\mathbb{R}$, která má v bázi $\mathcal{X}$ tvar

$$Q(\vec{x}) = \alpha\alpha_1^2 - 2\alpha_2^2 + (\alpha+1)\alpha_3^2 - 2\alpha\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha\alpha_1\alpha_3 + 2\alpha_2\alpha_3.$$

   Najděte $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, aby

   (a) Q byla PD,

   (b) Q byla singulární.

Domácí úkoly

1. Nechť je dána kvadratická forma v $\mathbb{C}^2$. Najděte signaturu a polární bázi Q.

$$Q(\vec{x}) = |x_1|^2 - \mathrm{i}\overline{x_1}x_2 + \mathrm{i}x_1\overline{x_2} - |x_2|^2.$$

2. Nechť je dána kvadratická forma v $\mathbb{C}^3$. Najděte signaturu a polární bázi Q.

$$Q(\vec{x}) = 2|x_1|^2 + x_1\overline{x_3} + \overline{x_1}x_3 - \mathrm{i}x_2\overline{x_3} + \mathrm{i}x_3\overline{x_2}.$$

3. Definujeme-li operace sčítání a násobení číslem pro kvadratické formy stejně, jako je pro zobrazení zvykem, tj. bodově, budou tvořit vektorový prostor? Napovězme, že je třeba dávat pozor na to, zda $T = \mathbb{R}$ nebo $T = \mathbb{C}$. Pokud kvadratické formy vektorový prostor tvoří, najděte jeho dimenzi a bázi.