

## Cvičení LAA11

### Skalární součin

1. Necht  $P = \left[ \left( \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -5 & 3 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} 3 & 2 \\ 8 & -7 \end{array} \right) \right]_{\lambda} \subset \mathbb{R}^{2,2}$ . Najděte OG bázi obsahující vektor  $z \left[ \left( \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{array} \right) \right]_{\lambda}$ , je-li dán skalární součin  $\langle \mathbb{A} | \mathbb{B} \rangle = \sum_{i,j=1}^2 \mathbb{A}_{ij} \mathbb{B}_{ij}$ .

2. Najděte OG bázi  $P \subset \mathbb{R}^3$ , kde  $P \equiv 2x - 2y + z = 0$ , je-li v  $\mathbb{R}^3$  definován skalární součin ve standardní bázi

$$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_3,$$

tak, aby báze obsahovala vektor  $z \in Q \equiv x - y - z = 0$ .

3. Necht  $P = \left[ \left( \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{array} \right) \right]_{\lambda} \subset \mathbb{R}^4$  se standardním skalárním součinem. Najděte  $P^{\perp}$ .

Najděte dvěma různými způsoby OG průmět  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  do  $P$ .

4. Necht  $P \subset \mathbb{R}^3$  se skalárním součinem

$$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 + 6x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2.$$

Najděte ON bázi  $P^{\perp}$ , je-li  $P \equiv x = 0$ .

5. Necht  $P, Q \subset \mathbb{R}^4$ , kde  $\mathbb{R}^4$  je eukleidovský prostor. Najděte  $Q^{\perp}$  do  $P$ , je-li  $P = \left[ \left( \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right) \right]_{\lambda}$

$$\text{a } Q = \left[ \left( \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{array} \right) \right]_{\lambda}.$$

6. Necht  $\mathcal{P}_3$  je prostor polynomů stupně maximálně 2 se skalárním součinem

$$(a) \langle x | y \rangle = \alpha_0 \bar{\beta}_0 + \alpha_1 \bar{\beta}_1 + \alpha_2 \bar{\beta}_2,$$

$$(b) \langle x | y \rangle = \alpha_0 \bar{\beta}_0 - \alpha_0 \bar{\beta}_1 - \alpha_1 \bar{\beta}_0 + 2\alpha_1 \bar{\beta}_1 + 4\alpha_2 \bar{\beta}_2,$$

kde  $x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$  a  $y(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2$  pro každé  $t \in \mathbb{C}$ . Najděte jeho ON bázi v prvním a druhém případě.

### Domácí úkoly

1. Necht je v prostoru matic  $\mathbb{R}^{2,2}$  dán skalární součin s maticí  ${}^{\varepsilon}Q = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Řešte

úlohu 1. s takto zadaným skalárním součinem.

2. Necht  $\varphi \in (\mathbb{R}^4)^\#$ , kde  $(\varphi)_{\mathcal{E}\#} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Necht  $P = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \varphi(\vec{x}) = 0\}$  a  $Q = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$ .

V  $\mathbb{R}^4$  je definován skalární součin ve standardní bázi  $\mathcal{E}$

$$\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 - x_1y_4 - x_4y_1.$$

Najděte ON bázi  $Q^\perp$  do  $P$ .

3. Necht  $P \subset \subset \mathbb{R}^4$ , kde  $P \equiv x - 2y + z = 0$ . V  $\mathbb{R}^4$  je definován skalární součin

$$\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 + 6x_3y_3 + x_4y_4 - x_1y_4 - x_4y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2,$$

kde  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$  a  $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ . Najděte

(a)  $P^\perp$ ,

(b)  $\vec{a}_P$ , je-li  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .