# Cvičení LAA10

## Skalární součin

1. V $\mathbb{R}^2$ definujeme zobrazení $\langle \vec{x}|\vec{y}\rangle = x_1y_1+2x_2y_2+x_1y_2+x_2y_1$, kde $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ a $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Je to skalární součin?

2. V $\mathcal{P}$ definujeme $\langle x|y\rangle = x(0)\overline{y(0)} + x(1)\overline{y(1)} + x(2)\overline{y(2)}$. Je to skalární součin?

3. Nechť $V$ je reálný vektorový prostor funkcí definovaných a spojitých na intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Dokažte, že následující zobrazení je skalární součin na $V$.
$$h(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt \quad \text{pro každé } f, g \in V.$$

4. V $\mathbb{R}^3$ definujeme skalární součin $\langle \vec{x}|\vec{y}\rangle = 4x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1$. Najděte všechny vektory kolmé na $\vec{e}_1$.

5. V unitárním prostoru $\mathbb{C}^2$ najděte dvě různé ON báze.

6. V eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ je dán podprostor $P = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \\ -12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right]_\lambda$.
Najděte ON bázi $P$. $(a)$ Bez použití Gram-Schmidta a $(b)$ s použitím Gram-Schmidta.

7. V eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ doplňte vektory $\left( \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \right)$ na ON bázi.
$(a)$ Bez použití Gram-Schmidta a $(b)$ s použitím Gram-Schmidta.

## Domácí úkoly

1. Uvažujme prostor $V$ z příkladu 3. Zjistěte, zda jsou polynomy $e_1, e_2, e_3$ ON (připomeňme, že $e_1(t) = 1, e_2(t) = t, e_3(t) = t^2$). Pokud nejsou, ortonormalizujte je, tj. najděte ON funkce $f, g, h$ tak, že $[e_1, e_2, e_3]_\lambda = [f, g, h]_\lambda$.

2. Vytvořte program pro ortogonalizaci vektorů pomocí Gramova-Schmidtova ortogonalizačního procesu v prostoru $\mathbb{R}^n$. Nechť uživatel sám zadává, jak vypadá skalární součin (např. pomocí matice odpovídajíci kvadratické formy ve standardní bázi). Program musí samozřejmě kontrolovat, zda jde o dobře zadaný skalární součin (vhodné je využít Sylvesterova kritéria). A dále samozřejmě uživatel zadává, jaké vektory chce ortogonalizovat (libovolný počet mezi 1 a $n$). Program musí kontrolovat jejich LN. (2 týdny)