

Cvičení LAA8

Hermitovské a kvadratické formy

1. Necht Q je kvadratická forma v \mathbb{R}^3 . Najděte její polární bázi. Pro $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ definujeme

(a) $Q(\vec{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$,

(b) $Q(\vec{x}) = x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_1x_2$,

(c) $Q(\vec{x}) = 9x_2^2 + 9x_3^2 + 12x_1x_2 + 12x_1x_3 - 6x_2x_3$,

(d) $Q(\vec{x}) = -x_3^2 - x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$,

(e) $Q(\vec{x}) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

2. Necht Q je kvadratická forma ve V_3 nad \mathbb{R} a \mathcal{X} je báze V_3 . Najděte signaturu a polární bázi Q . Určete charakter Q (PD, PSD, ND, NSD, indefinitní). Dále určete, zda jde o regulární či

singulární formu. Pro $\vec{x} \in V_3$, $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$, definujeme

(a) $Q(\vec{x}) = \alpha_1^2 + 3\alpha_2^2 + 4\alpha_3^2 - 2\alpha_1\alpha_2 + 4\alpha_1\alpha_3 - 2\alpha_2\alpha_3$,

(b) $Q(\vec{x}) = \alpha_1^2 - 2\alpha_2^2 + 4\alpha_1\alpha_2$.

3. Necht Q je kvadratická forma ve V_4 nad \mathbb{R} a \mathcal{X} je báze V_3 . Najděte polární bázi Q , je-li

$${}^{\mathcal{X}}Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Necht h je hermitovská forma v \mathbb{R}^3 , která má ve standardní bázi tvar $h(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3$. Necht Q je diagonála h . Najděte \mathcal{X} bázi \mathbb{R}^3 tak, aby

(a) ${}^{\mathcal{X}}Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$,

(b) ${}^{\mathcal{X}}Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Necht Q je kvadratická forma ve V_3 nad \mathbb{R} a \mathcal{X} je báze V_3 . Najděte nulprostor Q . Pro

$\vec{x} \in V_3$, $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ definujeme $Q(\vec{x}) = \alpha_1^2 + 3\alpha_2^2 - 2\alpha_1\alpha_2 - 4\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3$.

Domácí úkoly

1. Necht je dána kvadratická forma v \mathbb{C}^2 . Najděte signaturu a polární bázi Q .

$$Q(\vec{x}) = |x_1|^2 - i\bar{x}_1x_2 + ix_1\bar{x}_2 - |x_2|^2.$$

2. Necht je dána kvadratická forma v \mathbb{C}^3 . Najděte signaturu a polární bázi Q .

$$Q(\vec{x}) = 2|x_1|^2 + x_1\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_3 - ix_2\bar{x}_3 + ix_3\bar{x}_2.$$

3. Definujeme-li operace sčítání a násobení číslem pro kvadratické formy stejně, jako je pro zobrazení zvykem, tj. bodově, budou tvořit vektorový prostor? Napovmězme, že je třeba dávat pozor na to, zda $T = \mathbb{R}$ nebo $T = \mathbb{C}$. Pokud kvadratické formy vektorový prostor tvoří, najděte jeho dimenzi a bázi.