

Cvičení LAA6

Vlastní čísla a vlastní vektory operátorů

1. Necht $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ je operátor zrcadlení podle osy x . Najděte vlastní čísla a vlastní vektory operátoru A . Je diagonalizovatelný?
2. Necht $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ je operátor rotace o $\frac{\pi}{2}$ proti směru ručiček hodin. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory operátoru A . Je diagonalizovatelný?
3. Necht $A \in \mathcal{L}(V_3)$, \mathcal{X} je báze V_3 . Je A diagonalizovatelný operátor? Pokud ano, najděte bázi \mathcal{Y} tak, že ${}^{\mathcal{Y}}A$ je diagonální matice.

(a)

$${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix},$$

(b)

$${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Necht $A \in \mathcal{L}(V_3)$, \mathcal{X} je báze V_3 . Je A^{-1} diagonalizovatelný operátor? Pokud ano, najděte bázi \mathcal{Y} tak, že ${}^{\mathcal{Y}}(A^{-1})$ je diagonální matice.

$${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} -20 & 9 & -18 \\ 6 & -5 & 6 \\ 24 & -12 & 22 \end{pmatrix}.$$

5. Necht $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$, $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ je báze \mathbb{R}^4 a \mathcal{E} je standardní báze \mathbb{R}^4 . Je A diagonalizovatelný operátor? Pokud ano, najděte bázi \mathcal{Y} tak, že ${}^{\mathcal{Y}}A$ je diagonální matice.

$${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Necht $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ a \mathcal{E} je standardní báze \mathbb{R}^4 . Najděte všechna $\alpha \in \mathbb{R}$, pro která je A diagonalizovatelný.

$${}^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Necht $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3)$ splňuje $Ax(t) = x(\alpha - 2t)$ pro každé $x \in \mathcal{P}_3$ a každé $t \in \mathbb{C}$. Pro jaká $\alpha \in \mathbb{C}$ je A diagonalizovatelný? Pro taková α najděte \mathcal{Y} bázi \mathcal{P}_3 takovou, že ${}^{\mathcal{Y}}A$ je diagonální matice.
8. Necht $D, S \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$ jsou operátory derivování a integrování na \mathcal{P} . Najděte spektrum a všechny vlastní vektory D a S .

Domácí úloha

1. Necht $P, Q \subset V, P \neq V, Q \neq V, P \oplus Q = V$. Necht A_P je projektor na P podle Q .

(a) Nalezněte $\sigma(A_P)$.

(b) Je-li $\dim V \in \mathbb{N}$, určete algebraickou a geometrickou násobnost vlastních čísel operátoru A_P .

(c) Je operátor A_P diagonalizovatelný v případě $\dim V \in \mathbb{N}$?

2. Necht $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$

$$\varepsilon_A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

V následujících úlohách využijte teoretické znalosti tak, abyste počítali co nejméně.

(a) Najděte spektrum A a určete, pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ je A diagonalizovatelný.

(b) Najděte spektrum A^{-1} a určete, pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ je A^{-1} diagonalizovatelný.

3. Naprogramujte Cramerovo pravidlo a výpočet inverzní matice pomocí adjungované (1 týden).