Cvičení LAA1 – část B

Regulární operátor

1. Nechť $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$, kde pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ platí $A\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_2 \\ \gamma x_1 + \delta x_2 \end{pmatrix}$. Najděte co nejjednodušší nutnou a postačující podmínku, aby byl operátor A regulární.

2. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2,2})$. Je A regulární?
   (a) $A\mathbb{X} = \mathbb{X} + \mathbb{X}^T$,
   (b) $A\mathbb{X} = \mathbb{B}\mathbb{X}$, kde $\mathbb{B} \in \mathbb{R}^{2,2}$,
   (c) $A\mathbb{X} = \mathbb{X}\mathbb{B}$, kde $\mathbb{B} \in \mathbb{R}^{2,2}$.

3. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$. Dokažte, že A je regulární, platí-li $Ax(t) = x(t+1)$ pro každé $x \in \mathcal{P}$ a $t \in \mathbb{C}$.

4. Je součet regulárních operátorů na V opět regulární?

5. Může být součet regulárního a neregulárního operátoru regulární? Může být součet dvou neregulárních operátorů regulární?

6. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $A, B \in \mathcal{L}(V)$. Dokažte, že je-li A regulární a B není regulární, pak AB ani BA není regulární.

7. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $A, B \in \mathcal{L}(V)$. Platí implikace: Není-li A ani B regulární, pak AB ani BA není regulární?

Domácí úlohy

1. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $A, B \in \mathcal{L}(V)$. Dokažte ekvivalenci: A i B je regulární, právě když AB i BA je regulární.

2. Nechť $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{L}(V)$. Nechť právě jeden z nich není regulární. Potom jejich složení $A_1 \ldots A_n$ není regulární. Dokažte.

3. Nechť $A, B, C, D \in \mathcal{L}(V)$ a nechť $A + B$ a $A - B$ jsou regulární. Potom existuje právě jedna dvojice operátorů $X, Y \in \mathcal{L}(V)$ taková, že $AX + BY = C$ a $AY + BX = D$. Dokažte a nalezněte operátory X a Y.

4. Nechť $A \in \mathcal{L}(V)$. Nechť existuje právě jeden operátor z $B \in \mathcal{L}(V)$ takový, že $AB = I$ nebo $BA = I$. Potom A je regulární.

5. Jak se změní matice přechodu od báze $\mathcal{X}$ k bázi $\mathcal{Y}$, jestliže:
   (a) V bázi $\mathcal{X}$ zaměníme i-tý a j-tý vektor.
   (b) V bázi $\mathcal{Y}$ zaměníme i-tý a j-tý vektor.
   (c) V bázi $\mathcal{X}$ zaměníme i-tý a j-tý vektor a v bázi $\mathcal{Y}$ zaměníme k-tý a ℓ-tý vektor.