Zkoušková písemka LAA2 21.6.2016 Jméno:

Snažte se využívat znalosti z teorie ke zjednodušení výpočtu. Tam, kde teorii využíváte, uveďte krátký komenář.

1. Nechť Q je kvadratická forma v $\mathbb{R}^3$ definovaná pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$:

$$Q(\vec{x}) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 2\alpha x_1 x_2 + 4x_1 x_3 + 4x_2 x_3.$$

   (a) Najděte polární bázi a vyšetřete signaturu Q v závislosti na $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (b) Vyšetřete nulprostor a regularitu Q v závislosti na $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (c) Najděte ${}^{\mathcal{X}}Q$, je-li $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

   (d) Rozhodněte, pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ existuje báze $\mathcal{Y}$ prostoru $\mathbb{R}^3$ taková, že ${}^{\mathcal{Y}}Q$ má spektrum rovno:

   (d1) $\{0, 1\}$, (d2) $\{-2, -1, 0\}$.

   V kladném případě takovou bázi najděte.

2. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$

$${}^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Najděte $\sigma(A)$ a určete, pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ je A diagonalizovatelný operátor.

   (b) Najděte $\sigma(A^{-1})$ (existuje-li) a určete, pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ je A^{-1} diagonalizovatelný operátor.

   (c) Najděte $\sigma(A^*)$ a určete, pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ je A^* diagonalizovatelný operátor.

3. Nechť je dán $\mathbb{R}^3$ se skalárním součinem definovaným pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ jako:

$$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 2x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_1 y_2 - x_2 y_1,$$

   přičemž x_i, resp. y_i pro $i \in \{1, 2, 3\}$ jsou složky vektoru $\vec{x}$, resp. $\vec{y}$.

   (a) Najděte ortonormální bázi $\mathbb{R}^3$.

   (b) Najděte ${}^{\mathcal{E}}A$, víte-li, že A je ortogonální operátor mající jedno záporné vlastní číslo a pro který platí:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   (c) Určete úhel $\measuredangle W_1 W_2$, kde

$$W_1 \equiv \begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ x + 2y & = & 1 \end{array} \quad \text{a} \quad W_2 \equiv \begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & t \\ z & = & -1 - t \end{array}.$$