Zkoušková písemka LAA2 14.6.2016 Jméno:

Snažte se využívat znalosti z teorie ke zjednodušení výpočtu. Tam, kde teorii využíváte, uveďte krátký komenář.

1. Nechť Q je kvadratická forma v $\mathbb{R}^4$,

$$ {}^{\mathcal{E}}Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\alpha}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{2} & 0 & \frac{\alpha}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\alpha}{2} & 0 \end{pmatrix}. $$

   (a) Najděte polární bázi a určete signaturu Q v závislosti na $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (b) Najděte dvěma různými způsoby nulprostor Q v závislosti na $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (c) V tomto bodě uvažujeme pouze $\alpha = 0$. Označme $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ vlastní čísla ${}^{\mathcal{E}}Q$. Najděte bázi $\mathcal{B}$ tak, aby ${}^{\mathcal{B}}Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}$.

2. Nechť $\mathcal{P}_3$ je prostor polynomů stupně maximálně dva se skalárním součinem:

$$ \langle x \mid y \rangle = \alpha_0\overline{\beta_0} - \alpha_0\overline{\beta_1} - \alpha_1\overline{\beta_0} + 2\alpha_1\overline{\beta_1} + 4\alpha_2\overline{\beta_2} - \alpha_1\overline{\beta_2} - \alpha_2\overline{\beta_1}, $$

   kde $x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$ a $y(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.

   (a) Ověřte, že jde o skalární součin.

   (b) Najděte $Q^\perp$ do $\mathcal{P}_3$, je-li:

$$ Q = \{x \in \mathcal{P}_3 \mid x(1+t) = x(1-t) \text{ pro každé } t \in \mathbb{C}\}. $$

   (c) Spočítejte vzdálenost $\rho(e_2, Q)$, kde $e_2(t) = t$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.

   (d) Uveďte příklad $M \subset \mathcal{P}_3$ takové, že $M \neq (M^\perp)^\perp$.

3. V eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou dány podprostory:

$$ P \equiv \begin{array}{rcl} x+y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array}, \quad Q \equiv x - y = 0. $$

   Nechť A_P značí projektor na P podle Q.

   (a) Najděte ${}^{\mathcal{X}}(A_P{}^*)$, kde $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

   (b) Je A_P normální?

   (c) Je A_P symetrický?

   (d) Je A_P ortogonální?

   (e) Je A_P diagonalizovatelný? Pokud ano, najděte bázi, v níž má A_P diagonální tvar.

   (f) Úlohy (a) – (e) řešte i pro projektor na Q podle P, tj. A_Q.