Zkoušková písemka LAA2 7.6.2016 Jméno:

Snažte se využívat znalosti z teorie ke zjednodušení výpočtu. Tam, kde teorii využíváte, uveďte krátký komenář.

1. Nechť je dán $\mathbb{R}^{2,2}$ se skalárním součinem definovaným pro každé $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{R}^{2,2}$ jako:

$$\langle \mathbb{A} | \mathbb{B} \rangle = ((\mathbb{A})_{\mathcal{E}})^T \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} (\mathbb{B})_{\mathcal{E}},$$

přičemž $\mathcal{E}$ je standardní báze $\mathbb{R}^{2,2}$.

   (a) Doplňte $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ na ortonormální bázi $\mathbb{R}^{2,2}$.

   (b) Najděte ortogonální průmět $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ do $P = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda$.

   (c) Spočítejte vzdálenost $\mathbb{X}$ od lineární variety $W_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + P$.

   (d) Určete úhel $\measuredangle W_2 W_3$, kde $W_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda$ a $W_3 = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$.

2. Nechť Q je kvadratická forma v $\mathbb{R}^3$ definovaná pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$:

$$Q(\vec{x}) = \alpha x_1^2 - 2x_2^2 + (\alpha + 1)x_3^2 - 2\alpha x_1 x_2 - 2\alpha x_1 x_3 + 2x_2 x_3.$$

   (a) Najděte všechna $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, aby Q byla singulární. Pro taková α najděte polární bázi.

   (b) Najděte všechna $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, aby polára h kvadratické formy Q byla skalárním součinem.

   (c) Vyšetřete nulprostor Q v závislosti na $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3)$

$$^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} i & 0 & i \\ 0 & 2i & 0 \\ i & 0 & -i \end{pmatrix},$$

kde $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$ je báze $\mathcal{P}_3$

$$x_1(t) = 1 + t, \; x_2(t) = 1 - t, \; x_3(t) = t^2 \quad \text{pro každé } t \in \mathbb{C}.$$

V $\mathcal{P}_3$ uvažujeme skalární součin definovaný pro každé $x, y \in \mathcal{P}_3$ jako

$$\langle x | y \rangle = \alpha_0 \overline{\beta_0} + \alpha_1 \overline{\beta_1} + \alpha_2 \overline{\beta_2},$$

kde $x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$ a $y(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.

   (a) Najděte $^{\mathcal{E}}(A^{-1})^{\mathcal{X}}$.

   (b) Najděte $^{\mathcal{E}}(A^*)$.

   (c) Rozhodněte a zdůvodněte, zda je operátor A:
      i. normální,
      ii. hermitovský,
      iii. unitární,
      iv. diagonalizovatelný.