Zkoušková písemka LAA2 3.6.2016 Jméno:

Snažte se využívat znalosti z teorie ke zjednodušení výpočtu. Tam, kde teorii využíváte, uveďte krátký komenář.

1. Nechť Q je kvadratická forma v $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^3$, přičemž pro každé $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ platí:
$$Q(\vec{x}) = \alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_2\alpha_3, \text{ kde } (\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}.$$
   (a) Najděte polární bázi Q.
   (b) Doplňte na polární bázi Q (pokud to lze): (b1) $\vec{x}_1$, (b2) $\vec{x}_2 + \vec{x}_3$.
   (c) Najděte bázi $\mathcal{Y}$ tak, aby
$$\text{(c1) } {}^{\mathcal{Y}}Q = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{(c2) } {}^{\mathcal{Y}}Q = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$
   (d) Označme $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ vlastní čísla ${}^{\mathcal{X}}Q$. Najděte bázi $\mathcal{B}$ tak, aby ${}^{\mathcal{B}}Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.

2. Nechť W_1, W_2 jsou lineární variety v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$.
$$W_1 \equiv \begin{array}{rcl} x & = & t \\ y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \qquad W_2 \equiv \begin{array}{rcr} x + z & = & 0 \\ y & = & -5 \end{array}.$$
   (a) Určete vzdálenost $\rho(W_1, W_2)$.
   (b) Spočtěte úhel $\measuredangle W_1 W_2$.
   (c) Najděte všechny přímky W, které splňují:
$$\measuredangle W W_1 = \frac{\pi}{3}, \ \measuredangle W W_2 = \frac{\pi}{2} \text{ a } W \cap W_1 \neq \emptyset, \ W \cap W_2 \neq \emptyset.$$

3. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$
$${}^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} \alpha + 1 & -\alpha & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$
   V $\mathbb{R}^3$ je definován skalární součin:
$$\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1, \text{ kde } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ a } \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$
   (a) Pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ existuje A^{-1}? Pro taková α vyšetřete $\sigma(A^{-1})$.
   (b) Najděte ${}^{\mathcal{E}}(A^*)$. Určete $\sigma(A^*)$.
   (c) Pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ je A symetrický operátor? Pro taková α vyšetřete, zda je A diagonalizovatelný.