

Zkoušková písemka LAA2 30.5.2014

Jméno:

100 minut, alespoň 1,5 příkladu správně a 1 příklad úplně správně (až na drobné numerické chyby).

1. Nechtě $A, D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3)$, kde D je operátor derivování a pro každé $x \in \mathcal{P}_3$ platí:

$$(Ax)(t) = \alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_1 t,$$

je-li $x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.

Nechtě je dále definován skalární součin:

$$\langle x | y \rangle = \alpha_0 \overline{\beta_0} + \alpha_0 \overline{\beta_1} + \alpha_1 \overline{\beta_0} + 2\alpha_1 \overline{\beta_1} + \alpha_2 \overline{\beta_2},$$

je-li $x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$, $y(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.

- (a) Najděte spektrum $D - A$ a všechny vlastní vektory $D - A$.
(b) Najděte spektrum $(D - A)^*$ a všechny vlastní vektory $(D - A)^*$.
2. Nechtě W_1 a W_2 jsou lineární variety v eukleidovském prostoru \mathbb{R}^3 , přičemž

$$W_1 \equiv 2x - y - 2z = 1 \quad \text{a} \quad W_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_{\lambda}.$$

- (a) Určete vzdálenost W_1 a W_2 .
(b) Najděte všechny příčky W variet W_1 a W_2 splňující: $\angle WW_1 = \frac{\pi}{2}$ a $\angle WW_2 = \frac{\pi}{2}$.
3. Nechtě Q je kvadratická forma v \mathbb{R}^4 :

$$Q(\vec{x}) = \alpha x_1 x_2 + \alpha x_1 x_4 + \alpha x_2 x_3 + x_3 x_4$$

pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

- (a) Najděte nulprostor Q v závislosti na $\alpha \in \mathbb{R}$.
(b) Určete signaturu Q v závislosti na $\alpha \in \mathbb{R}$.
(c) Pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ je polára h kvadratické formy Q skalárním součinem na \mathbb{R}^4 ?