Zkoušková písemka LAA2 27.5.2014 Jméno:

100 minut, alespoň 1,5 příkladu správně a 1 příklad úplně správně (až na drobné numerické chyby).

1. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$, kde $\mathbb{R}^4$ je eukleidovský prostor.

$$^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   V následujících úlohách využijte teoretické znalosti tak, abyste počítali co nejméně.

   (a) Najděte spektrum A a určete, pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ je A diagonalizovatelný.

   (b) Najděte spektrum A^{-1} a určete, pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ je A^{-1} diagonalizovatelný.

   (c) Najděte spektrum A^* a určete, pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ je A^* diagonalizovatelný.

   (d) Určete pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ je A normální, resp. ortogonální, resp. symetrický.

2. Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$ se skalárním součinem definovaným

$$\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + 3x_4y_4$$

   pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ a $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ z $\mathbb{R}^4$. Nechť dále

$$P \equiv x - 2y + z + u = 0.$$

   Najděte

   (a) OG bázi P,

   (b) $P^\perp$ do $\mathbb{R}^4$,

   (c) OG průmět $\vec{x}$ do P, je-li $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}$.

3. Nechť Q je kvadratická forma v $\mathbb{R}^3$

$$^{\mathcal{X}}Q = \begin{pmatrix} 5 & \alpha & 2 \\ \alpha & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

   kde $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^3$.

   (a) Určete signaturu Q v závislosti na $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (b) Najděte nulprostor Q.

   (c) V případě, kdy je Q pozitivně semidefinitní, najděte polární bázi Q.