Zkoušková písemka LAA2 25.6.2013 Jméno:

100 minut, alespoň 1,5 příkladu správně a 1 příklad úplně správně (až na drobné numerické chyby).

1. Nechť je dán vektorový prostor $\mathbb{R}^3$ se skalárním součinem
$$\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_2y_3 + x_3y_2,$$
kde $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ a $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. Spočítejte
   (a) vzdálenost $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_\alpha$,
   (b) úhel mezi $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_\alpha$ a $W \equiv x - y - z = 1$.

2. Nechť $\mathbb{R}^3$ je eukleidovský prostor, tj. se standardním skalárním součinem. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ takový, že ${}^{\mathcal{E}}A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\sqrt{2} \\ \alpha & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ je A ortogonální, pro jaká symetrický a pro jaká normální?
   (b) Vyšetřete $\sigma(A)$ a najděte ON bázi z vlastních vektorů A, existuje-li.
   (c) Vyšetřete $\sigma(A^*)$ a najděte ON bázi z vlastních vektorů A^*, existuje-li.

3. Nechť Q je kvadratická forma v $\mathbb{R}^4$. Nechť ${}^{\mathcal{X}}Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, kde $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^4$. Najděte
   (a) signaturu Q,
   (b) polární bázi Q,
   (c) nulprostor Q.