Zkoušková písemka LAA2 17.6.2014 Jméno:

100 minut, alespoň 1,5 příkladu správně a 1 příklad úplně správně (až na drobné numerické chyby).

1. Nechť $\varphi \in (\mathbb{R}^4)^{\#}$, kde $(\varphi)_{\mathcal{E}^{\#}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Nechť dále $P = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \varphi(\vec{x}) = 0\}$ a $Q = [\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}]_\lambda$.
   V $\mathbb{R}^4$ je definován skalární součin ve standardní bázi $\mathcal{E}$
   $$\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 - x_1y_4 - x_4y_1.$$
   Najděte ON bázi $Q^\perp$ do P.

2. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3)$, přičemž v $\mathcal{P}_3$ je definován skalární součin
   $$\langle x|y \rangle = \alpha_0\overline{\beta_0} + 4\alpha_1\overline{\beta_1} + \alpha_2\overline{\beta_2},$$
   je-li $x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$ a $y(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.
   Nechť dále
   $$(Ax_1)_\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (Ax_2)_\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (Ax_3)_\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$
   je-li $x_1(t) = t, \quad x_2(t) = t^2 - 1, \quad x_3(t) = 1 + t^2$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.
   (a) V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{C}$ určete, kdy je A normální, resp. unitární, resp. hermitovský.
   (b) V případech, kdy je A unitární, najděte $\sigma(A)$ a ON bázi $\mathcal{P}_3$ z vlastních vektorů A.
   (c) V případech, kdy je A unitární, najděte $\sigma(A^*)$ a ON bázi $\mathcal{P}_3$ z vlastních vektorů A^*.

3. Nechť Q je kvadratická forma v $\mathbb{R}^3$.
   $$Q(\vec{x}) = (\alpha + 1)x_1^2 + (\alpha + 2)x_2^2 + x_3^2 - 2\alpha x_1x_2 - 2x_1x_3,$$
   kde $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.
   V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$
   (a) určete signaturu,
   (b) vyšetřete nulprostor,
   (c) najděte polární bázi $\mathcal{A}$ formy Q tak, aby
   $$^{\mathcal{A}}Q = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$
   (d) najděte ON bázi $\mathbb{R}^3$ v případech, kdy je na $\mathbb{R}^3$ dán skalární součin, jehož je Q diagonálou.