Zkoušková písemka LAA2 10.6.2014 Jméno:

100 minut, alespoň 1,5 příkladu správně a 1 příklad úplně správně (až na drobné numerické chyby).

1. Nechť je dána kvadratická forma v $\mathbb{R}^3$, jejíž matice v bázi $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ má tvar ${}^{\mathcal{X}}Q = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & -\alpha \\ \alpha & 1 & 0 \\ -\alpha & 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

   (a) Najděte signaturu Q v závislosti na $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (b) Vyšetřete nulprostor Q v závislosti na $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (c) Najděte polární bázi $\mathbb{R}^3$ v případech, kdy je Q pozitivně definitní.

   (d) Najděte ON bázi $\mathbb{R}^3$ v případech, kdy je na $\mathbb{R}^3$ dán skalární součin, jehož je Q diagonálou.

2. Nechť $\mathbb{R}^3$ je eukleidovský prostor, tj. se standardním skalárním součinem. Najděte matici ve standardní bázi ortogonálního operátoru $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ takového, že

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \det A > 0.$$

   Dále najděte:

   (a) Vlastní čísla A a ON bázi $\mathbb{R}^3$ z vlastních vektorů A.

   (b) Vlastní čísla A^* a ON bázi $\mathbb{R}^3$ z vlastních vektorů A^*.

   (c) Vlastní čísla A^{-1} a ON bázi $\mathbb{R}^3$ z vlastních vektorů A^{-1}.

   (d) Zjistěte, zda A je OG operátor také na prostoru $\mathbb{R}^3$ se skalárním součinem definovaným pro každé $\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right)$ a $\vec{y} = \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{smallmatrix}\right)$ jako

$$\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + 2 x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

3. Nechť W je lineární varieta v $\mathbb{R}^3$ se skalárním součinem

$$\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 - x_2y_1 - x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_2,$$

   kde $\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right)$ a $\vec{y} = \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{smallmatrix}\right)$.

$$W \equiv \begin{array}{rcl} 2x - y & = & 2 \\ 2y - z & = & 1 \end{array}.$$

   Dále nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, kde

$${}^{\mathcal{E}}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Najděte $\rho(A(W), A^{-1}(W))$ a spočtěte úhel mezi $A(W)$ a $A^{-1}(W)$, pokud je definován.