Zkoušková písemka LAA2 3.6.2014 Jméno:

100 minut, alespoň 1,5 příkladu správně a 1 příklad úplně správně (až na drobné numerické chyby).

1. Nechť $P \equiv x - 2y + z = 0$, $P \subset\subset \mathbb{R}^4$ se skalárním součinem, jehož diagonála Q má matici ve standardní bázi tvaru ${}^{\mathcal{E}}Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Najděte

   (a) OG doplněk R do P, je-li
   $$R = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_\lambda ,$$

   (b) ON bázi P,

   (c) OG průmět $\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ do P.

2. Uvažujme vektorový prostor V_3 reálných polynomů stupně maximálně dva reálné proměnné s přidáním nulového polynomu. (Dimenze je tedy rovna třem.) Ve V je definováno zobrazení Q předpisem: $Q(x) = x(0)x(1) - x(0)x(-1)$ pro každé $x \in V$.

   (a) Vysvětlete, že Q kvadratická forma ve V.

   (b) Najděte polární bázi $\mathcal{A}$ kvadratické formy Q tak, aby

      i. ${}^{\mathcal{E}}Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$,

      ii. ${}^{\mathcal{E}}Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (c) Určete signaturu Q.

   (d) Vyšetřete nulprostor Q.

3. Nechť $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, kde $\mathbb{R}^3$ je eukleidovský prostor. Nechť je dále dáno zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, přičemž $A\vec{x} = \vec{a} \times 2\vec{x}$ pro každé $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

   (a) Je A lineární operátor?

   (b) Pro jaká $\vec{a}$ je A diagonalizovatelný?

   (c) Pro jaká $\vec{a}$ je A normální, resp. symetrický, resp. ortogonální?

   (d) Pro jaká $\vec{a}$ je A regulární?