Cvičení LAA9

Hermitovské a kvadratické formy

1. Nechť Q je kvadratická forma v $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^3$. Q má v bázi $\mathcal{X}$ tvar
$$Q(\vec{x}) = \alpha_3^2 - 2\alpha_1\alpha_3 - 2\alpha_2\alpha_3.$$
Zjistěte, pro která $\alpha \in \mathbb{R}$ leží $\begin{pmatrix} 1 \\ 2+\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ v nulprostoru Q.

2. Nechť Q je kvadratická forma ve V_3 nad $\mathbb{R}$, která má v bázi $\mathcal{X}$ tvar
$$Q(\vec{x}) = 5\alpha_1^2 + 5\alpha_2^2 + \alpha_3^2 + 2\alpha\alpha_1\alpha_2 + 4\alpha_1\alpha_3 + 4\alpha_2\alpha_3.$$
Určete charakter formy Q v závislosti na $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. Nechť Q je kvadratická forma ve V_3 nad $\mathbb{R}$, která má v bázi $\mathcal{X}$ tvar
$$Q(\vec{x}) = \alpha\alpha_1^2 - 2\alpha_2^2 + (\alpha+1)\alpha_3^2 - 2\alpha\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha\alpha_1\alpha_3 + 2\alpha_2\alpha_3.$$
Najděte $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, aby
   (a) Q byla PD,
   (b) Q byla singulární.

Skalární součin

1. V $\mathbb{R}^2$ definujeme zobrazení $\langle \vec{x}|\vec{y}\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1$, kde kde $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ a $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Je to skalární součin?

2. V $\mathcal{P}$ definujeme $\langle x|y\rangle = x(0)\overline{y(0)} + x(1)\overline{y(1)} + x(2)\overline{y(2)}$. Je to skalární součin?

3. V $\mathbb{R}^3$ definujeme skalární součin $\langle \vec{x}|\vec{y}\rangle = 4x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1$. Najděte všechny vektory kolmé na $\vec{e}_1$.

4. V unitárním prostoru $\mathbb{C}^2$ najděte dvě různé ON báze.

5. V eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ je dán podprostor $P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \\ -12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right]_\lambda$.
Najděte ON bázi P. (a) Bez použití Gram-Schmidta a (b) s použitím Gram-Schmidta.

6. V eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^4$ doplňte vektory $\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \right)$ na ON bázi.
(a) Bez použití Gram-Schmidta a (b) s použitím Gram-Schmidta.

7. Nechť $P = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 8 & -7 \end{pmatrix} \right]_\lambda \subset\subset \mathbb{R}^{2,2}$. Najděte OG bázi obsahující vektor z $\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda$, je-li dán skalární součin $\langle \mathbb{A}|\mathbb{B}\rangle = \sum_{i,j=1}^2 \mathbb{A}_{ij}\mathbb{B}_{ij}$.

Domácí úkoly

1. Nechť V je reálný vektorový prostor funkcí definovaných a spojitých na intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Dokažte, že následující zobrazení je skalární součin na V.

$$h(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt \quad \text{pro každé } f,g \in V.$$

2. Vytvořte program pro ortogonalizaci vektorů pomocí Gramova-Schmidtova ortogonalizačního procesu v prostoru $\mathbb{R}^n$. Nechť uživatel sám zadává, jak vypadá skalární součin (např. pomocí matice odpovídájíci kvadratické formy ve standardní bázi). Program musí samozřejmě kontrolovat, zda jde o dobře zadaný skalární součin (vhodné je využít Sylvesterova kritéria). A dále samozřejmě uživatel zadává, jaké vektory chce ortogonalizovat (libovolný počet mezi 1 a n). Program musí kontrolovat jejich LN. (2 týdny)