Cvičení LAA7

Hermitovské a kvadratické formy

1. Nechť $h(\vec{x},\vec{y}) = x_1y_1 + x_2y_2$, kde $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ a $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Dokažte, že h je hermitovská forma na $\mathbb{R}^2$.

2. Nechť $h(\vec{x},\vec{y}) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2}$, kde $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ a $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Dokažte, že h je hermitovská forma na $\mathbb{C}^2$.

3. Nechť $h(\vec{x},\vec{y}) = (\vec{x})^T\mathbb{A}(\vec{y})$, kde $\vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbb{A} = \mathbb{A}^T$. Dokažte, že h je hermitovská forma na $\mathbb{R}^n$.

4. Nechť $h(\vec{x},\vec{y}) = (\vec{x})^T\mathbb{A}\overline{(\vec{y})}$, kde $\vec{x},\vec{y} \in \mathbb{C}^n$ a $\mathbb{A} = \mathbb{A}^H$. Dokažte, že h je hermitovská forma na $\mathbb{C}^n$.

5. Nechť $h : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbb{C}$, kde pro každé $x, y \in \mathcal{P}$ platí

   $$h(x,y) = x(0)\overline{y(1)} + x(1)\overline{y(0)}.$$

   Dokažte, že h je hermitovská forma.

6. Nechť V je reálný vektorový prostor funkcí definovaných a spojitých na intervalu $\langle 0,1\rangle$. Dokažte, že následující zobrazení je hermitovská forma na V.

   $$h(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt \quad \text{pro každé } f,g \in V.$$

7. Nechť V_n je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{C}$ a $\mathcal{X}$ je báze V_n. Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ splňuje $\mathbb{A} = \mathbb{A}^H$. Nechť $h(\vec{x},\vec{y}) = {(\vec{x})_{\mathcal{X}}}^T\ \mathbb{A}\ \overline{(\vec{y})_{\mathcal{X}}}$. Dokažte, že h je hermitovská forma.

8. Nechť V_n je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$ a $\mathcal{X}$ je báze V_n. Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ splňuje $\mathbb{A} = \mathbb{A}^T$. Nechť $h(\vec{x},\vec{y}) = {(\vec{x})_{\mathcal{X}}}^T\ \mathbb{A}\ (\vec{y})_{\mathcal{X}}$. Dokažte, že h je hermitovská forma.

9. Nechť Q je kvadratická forma v $\mathbb{R}^3$. Najděte její polární bázi. Pro $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ definujeme

   (a) $Q(\vec{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$,
   (b) $Q(\vec{x}) = x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_1x_2$,
   (c) $Q(\vec{x}) = 9x_2^2 + 9x_3^2 + 12x_1x_2 + 12x_1x_3 - 6x_2x_3$,
   (d) $Q(\vec{x}) = -x_3^2 - x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$,
   (e) $Q(\vec{x}) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

Domácí úkoly

1. Nechť $h : \mathcal{P}_3 \times \mathcal{P}_3 \to \mathbb{C}$, kde pro každé $x, y \in \mathcal{P}_3$ platí

   $$h(x,y) = x(0)\overline{y(1)} + x(1)\overline{y(0)}.$$

   Najděte hermitovskou matici, tj. $\mathbb{A} = \mathbb{A}^H$ tak, aby $h(x,y) = ((x)_{\mathcal{E}})^T\mathbb{A}\overline{(y)_{\mathcal{E}}}$.

2. Vyřešte 9. příklad bod (b). (Načrtněte i obrázek množiny $\{\vec{x} \mid Q(\vec{x}) = 1\}$).