# Cvičení LAA5

## Vlastní čísla a vlastní vektory matic

1. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory následujících matic. Rozhodněte o jejich diagonalizovatelnosti. Jsou-li diagonalizovatelné, najděte regulární $\mathbb{X}$ a diagonální $\mathbb{D}$ tak, aby $\mathbb{A} = \mathbb{X}\mathbb{D}\mathbb{X}^{-1}$. Ověřte, že matice jsou kořeny svých charakteristických polynomů.

   (a)
   $$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix},$$

   (b)
   $$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

   (c)
   $$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -20 & 9 & -18 \\ 6 & -5 & 6 \\ 24 & -12 & 22 \end{pmatrix}.$$

2. Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je regulární. Vyšetřete vztah:

   (a) spekter $\mathbb{A}$ a $\mathbb{A}^{-1}$,

   (b) algebraických násobností vlastních čísel $\mathbb{A}$ a $\mathbb{A}^{-1}$,

   (c) geometrických násobností vlastních čísel $\mathbb{A}$ a $\mathbb{A}^{-1}$,

   (d) diagonalizovatelnosti $\mathbb{A}$ a $\mathbb{A}^{-1}$.

3. Je $\mathbb{A}^{-1}$ diagonalizovatelná matice? Pokud ano, najděte regulární $\mathbb{X}$ a diagonální $\mathbb{D}$ tak, aby $\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{X}\mathbb{D}\mathbb{X}^{-1}$.
   $$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -20 & 9 & -18 \\ 6 & -5 & 6 \\ 24 & -12 & 22 \end{pmatrix}.$$

## Domácí úloha

1. Víme, že ne každou matici lze diagonalizovat. Bez důkazu uveďme, že každá matice je podobná matici $\mathbb{J}$ v **Jordanově kanonickém tvaru**, kde

   $$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{pmatrix}$$

   je v blokově diagonálním tvaru (na diagonále jsou Jordanovy bloky $J_i$ a mimo ně jsou samé nuly). Jordanův blok má tvar:

   $$J_i = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

   Jordanův kanonický tvar je pro každou matici jedinečný až na pořadí bloků, počet Jordanových bloků odpovídajících vlastnímu číslu $\lambda$ je roven $\nu_g(\lambda)$ a součet řádů bloků odpovídajících $\lambda$ je roven $\nu_a(\lambda)$.

Najděte regulární matice $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ tak, že $\mathbb{A} = \mathbb{X}\mathbb{J}\mathbb{X}^{-1}$ a $\mathbb{B} = \mathbb{Y}\widehat{\mathbb{J}}\mathbb{Y}^{-1}$, kde $\mathbb{J}$ a $\widehat{\mathbb{J}}$ jsou v Jordanově kanonickém tvaru. Jsou si $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ podobné? Vysvětlete. (2 týdny)

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Naprogramujte Cramerovo pravidlo a výpočet inverzní matice pomocí adjungované (2 týdny).