Cvičení LAA4

Determinant

1. Nechť $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Najděte $[\mathbb{A}^{-1}]_{13}$ a $[\mathbb{A}^{-1}]_{31}$ pomocí matice adjungované.

   (b) Vyřešte soustavu $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ pomocí Cramerova pravidla, je-li $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$.

2. Určete hodnost matice pomocí subdeterminantů.
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Víte-li, že 23 dělí beze zbytku čísla $253, 529, 391$, dokažte bez výpočtu determinantu, že je také dělitelný beze zbytku číslem 23.
$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 9 \\ 3 & 9 & 1 \end{vmatrix}.$$

4. Víte-li, že a, b, c jsou kořeny polynomu $x^3 + px + q$, dokažte, že $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 0$.

5. Spočtěte $\det D$, kde $D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_n)$ je operátor derivování.

6. Jak se změní determinant matice n-tého řádu s komplexními prvky, pokud

   (a) napíšeme řádky v opačném pořadí,

   (b) napíšeme sloupce v opačném pořadí,

   (c) překlopíme matici podle hlavní diagonály,

   (d) překlopíme matici podle vedlejší diagonály,

   (e) zrcadlíme prvky matice podle středu,

   (f) každý prvek vynásobíme číslem $\alpha \neq 0$,

   (g) každý prvek $\mathbb{A}_{ij}$ vynásobíme α^{i-j}, $\alpha \neq 0$,

   (h) od každého řádku kromě posledního odečteme následující řádek a od posledního odečteme původní první řádek,

   (i) ke každému sloupci (počínaje posledním a konče druhým) přičteme předcházející a k prvnímu sloupci přičteme původní poslední sloupec,

   (j) každý prvek matice nahradíme číslem komplexně sdruženým.

7. Spočtěte determinant
$$\begin{vmatrix} 0 & a & a & \dots & a \\ b & 0 & a & \dots & a \\ b & b & 0 & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

8. Nechť $(D_n)_{n=1}^{+\infty}$ je komplexní posloupnost vyhovující rekurentnímu vztahu $D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}$ pro každé $n \geq 3$, kde $p, q \in \mathbb{C}$ a $p \cdot q \neq 0$. Potom platí:

   (a) Pro $q = 0$ je $D_n = p^{n-2} D_2$ pro $n \geq 3$.

   (b) Pro $q \neq 0$ označme λ_1, λ_2 kořeny rovnice $x^2 = px + q$.

      i. Pro $\lambda_1 \neq \lambda_2$ je $D_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$ pro $n \geq 1$, kde c_1, c_2 jsou konstanty jednoznačně určené členy D_1 a D_2.

      ii. Pro $\lambda_1 = \lambda_2$ je $D_n = (c_1 + nc_2)\lambda_1^n$ pro $n \geq 1$, kde c_1, c_2 jsou konstanty jednoznačně určené členy D_1 a D_2.

   Dokažte.

9. Pomocí předchozího příkladu spočtěte

   (a)
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}.$$

   (b)
$$\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\cdot\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & \alpha+\beta & \alpha\cdot\beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha+\beta & \alpha\cdot\beta \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix},$$

   kde $\alpha \neq 0 \vee \beta \neq 0$.

Domácí úlohy

1. Následující domácí úkol je **povinný** pro všechny. Vypracujte ho ve skupinách po maximálně pěti lidech do dvou týdnů. Jde o společnou práci, tudíž každý z vás musí řešení rozumět a musí být schopen mi ho vysvětlit. Úkol odevzdejte vypracovaný tak, aby byl každý krok jasný.

   (a)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}.$$

   (b)
$$\begin{vmatrix} \cos(\alpha_1-\beta_1) & \cos(\alpha_1-\beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_1-\beta_n) \\ \cos(\alpha_2-\beta_1) & \cos(\alpha_2-\beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_2-\beta_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(\alpha_n-\beta_1) & \cos(\alpha_n-\beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_n-\beta_n) \end{vmatrix},$$
   kde $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ pro každé $i \in \widehat{n}$.

(c) $$\begin{vmatrix} \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{2}{x} \end{vmatrix}, \text{ kde } x \neq 0.$$

(d) $$\begin{vmatrix} (2n-1)^n & (2n-2)^n & \cdots & n^n & (2n)^n \\ (2n-1)^{n-1} & (2n-2)^{n-1} & \cdots & n^{n-1} & (2n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2n-1 & 2n-2 & \cdots & n & 2n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

(e) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ 1 & \binom{3}{2} & \binom{4}{2} & \cdots & \binom{n+1}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \binom{n}{n-1} & \binom{n+1}{n-1} & \cdots & \binom{2n-2}{n-1} \end{vmatrix}.$$