Cvičení LAA3

Determinant

1. Rozhodněte, zda jde o člen determinantu matice $\mathbb{A}$ řádu 6.

   (a) $\mathbb{A}_{42}\mathbb{A}_{64}\mathbb{A}_{11}\mathbb{A}_{53}\mathbb{A}_{26}\mathbb{A}_{65}$,

   (b) $\mathbb{A}_{11}\mathbb{A}_{42}\mathbb{A}_{53}\mathbb{A}_{64}\mathbb{A}_{35}\mathbb{A}_{26}$.

2. Pro jaké i, k jde o člen determinantu matice $\mathbb{A}$ řádu 7?

$$-\mathbb{A}_{22}\mathbb{A}_{3k}\mathbb{A}_{76}\mathbb{A}_{13}\mathbb{A}_{57}\mathbb{A}_{4i}\mathbb{A}_{65}.$$

3. Určete, jaké znaménko má v determinantu $\mathbb{A}$ řádu n součin prvků

   (a) na hlavní diagonále,

   (b) na vedlejší diagonále.

4. Rozložte polynom p na kořenové činitele bez výpočtu determinantu

$$p(x) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ x & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & x & 3 & \dots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x & n \end{vmatrix}.$$

5. Čemu se rovná determinant

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x + b_1y + c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x + b_2y + c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x + b_3y + c_3 \end{vmatrix}?$$

6. Spočtěte následující determinant opakovaným rozvojem podle řádku či sloupce.

$$\begin{vmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & e & y & 0 & f \\ g & h & k & u & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix},$$

   kde všechny prvky matice jsou komplexní čísla.

7. Vypočtěte

   (a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

   (b)

$$\begin{vmatrix} x & y & y & y & \dots & y & y \\ y & x & y & y & \dots & y & y \\ y & y & x & y & \dots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ y & y & y & y & \dots & y & x \end{vmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{C},$$

(c)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & x & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 1 & x & x & x & \dots & x & 0 \end{vmatrix}, \quad x \in \mathbb{C}.$$

8. Spočtěte determinant

   (a) pomocí faktu, že jde o n-lineární formu,

   (b) rozložením příslušné matice na součin dvou matic.

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 + b_2 & \dots & a_1 + b_n \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 & \dots & a_2 + b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n + b_1 & a_n + b_2 & \dots & a_n + b_n \end{vmatrix}.$$

Domácí úlohy

1. Víte-li, že 23 dělí beze zbytku čísla $253, 529, 391$, dokažte bez výpočtu determinantu, že je také dělitelný beze zbytku číslem 23.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 9 \\ 3 & 9 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Víte-li, že a, b, c jsou kořeny polynomu $x^3 + px + q$, dokažte, že $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 0.$

3. Jak se změní determinant matice n-tého řádu s komplexními prvky, pokud

   (a) napíšeme řádky v opačném pořadí,

   (b) napíšeme sloupce v opačném pořadí,

   (c) překlopíme matici podle hlavní diagonály,

   (d) překlopíme matici podle vedlejší diagonály,

   (e) zrcadlíme prvky matice podle středu,

   (f) každý prvek vynásobíme číslem $\alpha \neq 0$,

   (g) každý prvek $\mathbb{A}_{ij}$ vynásobíme α^{i-j}, $\alpha \neq 0$,

   (h) od každého řádku kromě posledního odečteme následující řádek a od posledního odečteme původní první řádek,

   (i) ke každému sloupci (počínaje posledním a konče druhým) přičteme předcházející a k prvnímu sloupci přičteme původní poslední sloupec,

   (j) každý prvek matice nahradíme číslem komplexně sdruženým.