Cvičení LAA2

Inverzní matice a operátor

1. Nechť $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ jsou báze vektorového prostoru V_4 nad tělesem T. Nechť pro každé $\vec{x} \in V_4$ při označení $(\vec{x})_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}$ a $(\vec{x})_\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix}$ platí
$$\beta_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2,\ \beta_2 = \alpha_2 - 2\alpha_3,\ \beta_3 = \alpha_3 + 3\alpha_4,\ \beta_4 = -3\alpha_1 + \alpha_4.$$
Najděte ${}^\mathcal{Y}I^\mathcal{X}$.

2. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(V)$. Dokažte implikaci: Je-li $A^2 - A + I = \Theta$, pak A je regulární.

3. Jsou dány matice
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Spočtěte $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}$, $\mathbb{C}\mathbb{A}^{-1}$ bez toho, abyste spočetli $\mathbb{A}^{-1}$. Poté $\mathbb{A}^{-1}$ vypočítejte a předchozí výsledky pak pomocí nalezené $\mathbb{A}^{-1}$ zkontrolujte.

4. Pro jaká $\alpha \in \mathbb{C}$ existuje $\mathbb{A}^{-1}$? Pro taková α ji najděte. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$.

5. Najděte $\mathbb{A}^{-1}$, je-li $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ a $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ a ${}^\mathcal{X}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, kde $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ a $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ jsou báze $\mathbb{C}^2$. Je A regulární? Pokud ano, najděte ${}^\mathcal{Y}(A^{-1})$.

7. Nechť V_3 je vektorový prostor nad tělesem T a $A \in \mathcal{L}(V_3)$. Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ je báze V_3. Nechť pro každé $\vec{x} \in V_3$ platí $A\vec{x} = (\alpha_1 + 2\alpha_2)\vec{x}_1 + (\alpha_2 + 2\alpha_3)\vec{x}_2 + (\alpha_3 + 2\alpha_1)\vec{x}_3$, kde $(\vec{x})_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$. Je A regulární? Pokud ano, najděte ${}^\mathcal{X}(A^{-1})$.

8. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3)$ a platí $Ax(t) = x(t+1) - 2x(t)$ pro každé $x \in \mathcal{P}_3$ a $t \in \mathbb{C}$. Je A regulární? Pokud ano, najděte ${}^\mathcal{X}(A^{-1})^\mathcal{Y}$, kde $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$ a $\mathcal{Y} = (y_1, y_2, y_3)$ jsou báze $\mathcal{P}_3$ splňující pro každé $t \in \mathbb{C}$
$$x_1(t) = 3 - t + 2t^2,\ x_2(t) = 2 + 3t - t^2,\ x_3(t) = -1 + 2t + 4t^2,$$
$$y_1(t) = -8 - 3t - 2t^2,\ y_2(t) = -2 - t + t^2,\ y_3(t) = -13 - 10t - 4t^2.$$

Domácí úlohy

1. Naprogramujte úplnou Gaussovu eliminaci pro hledání inverzní matice.
2. Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ regulární. Jak se změní matice $\mathbb{A}^{-1}$, jestliže v matici $\mathbb{A}$:

   a) zaměníme i-tý a j-tý řádek,

   b) i-tý řádek vynásobíme číslem $\alpha \in T, \alpha \neq 0$,

   c) k i-tému řádku přičteme libovolný násobek j-tého řádku $(i \neq j)$?

   Jak se změní inverzní matice při podobných transformacích sloupců?
3. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2,2})$, $A\mathbb{X} = -\mathbb{X}^T$ pro každé $\mathbb{X} \in \mathbb{R}^{2,2}$. Dokažte, že A je regulární operátor na prostoru $\mathbb{R}^{2,2}$, a nalezněte ${}^{\mathcal{Y}}(A^{-1})^{\mathcal{E}}$, je-li $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \right)$ báze prostoru $\mathbb{R}^{2,2}$ a $\mathcal{E}$ je standardní báze $\mathbb{R}^{2,2}$.
4. Nalezněte množinu všech řešení následujících maticových rovnic:

   a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$,

   b) $\mathbb{X} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$,

   c) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \mathbb{X} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 11 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

Permutace

1. Nechť $\pi_1, \pi_2 \in S_5$
$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \ \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Najděte $\pi_1 \circ \pi_2, \ \pi_2 \circ \pi_1, \ \pi_1^{-1}$.

   (b) Najděte všechny inverze v π_1, resp. π_2, a určete $\mathrm{sgn}\pi_1$ a $\mathrm{sgn}\pi_2$.

   (c) Napište π_1 a π_2 jako složení transpozic.

   (d) Napište π_1 a π_2 jako složení cyklů. Pro jaké nejmenší $k \in \mathbb{N}$ platí $\pi_2^k = \mathrm{id}$?
2. Nechť $\pi \in S_7$
$$\pi = (2, 3, 6, 7, 1, 4, 5).$$
   Pozor, jde o zápis pomocí cyklu, tedy $\pi(2) = 3, \pi(3) = 6, \pi(6) = 7, \pi(7) = 1, \pi(1) = 4, \pi(4) = 5, \pi(5) = 2$.

   Dokažte, že $\pi^{259} = \mathrm{id}$.