

Cvičení LAA1 – část A

Frobeniova věta – řešení soustav LAR s parametry

Není-li řečeno jinak, hledejte řešení v oboru komplexních čísel.

1. (**cvičení**) Najděte množinu všech řešení soustavy LAR v závislosti na parametrech $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{C}$. V případě, kdy má soustava jedno řešení, nemusíte je hledat.

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y + \alpha\beta z &= \alpha \\ x + \alpha y + \beta z &= \alpha\beta \\ \alpha\beta x + y + \alpha z &= \beta \end{aligned}$$

2. Najděte množinu všech řešení soustavy LAR v závislosti na parametrech $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. V případě, kdy má soustava jedno řešení, nemusíte je hledat.

$$\begin{aligned} \alpha x + \alpha\beta y + \beta z &= 1 \\ -\beta x + \beta y + \beta z &= \beta \\ \alpha\beta x + \alpha y - \beta z &= 1 \end{aligned}$$

3. Najděte množinu všech řešení soustavy LAR v závislosti na parametrech $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y + \beta z &= 1 \\ \beta x + \alpha y + \beta z &= 1 \\ \beta x + \beta y + \alpha z &= 1 \end{aligned}$$

4. Najděte množinu všech reálných řešení soustavy LAR v závislosti na parametrech $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Pokud existuje jediné řešení, nemusíte je hledat.

$$\begin{aligned} x + \alpha y + \alpha^2 z &= \alpha^3 \\ x + \beta y + \beta^2 z &= \beta^3 \\ x + \gamma y + \gamma^2 z &= \gamma^3 \end{aligned}$$

5. Najděte množinu všech řešení soustavy LAR v závislosti na parametrech $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Pokud existuje jediné řešení, nemusíte je hledat.

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y + \beta z &= 1 \\ \beta x + \alpha y + z &= -2 \\ x + y + \alpha z &= 1 \end{aligned}$$

6. Najděte množinu všech řešení soustavy LAR v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \alpha x + iy - iz &= i \\ ix + \alpha y + \alpha z &= i \end{aligned}$$

7. V závislosti na parametrech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ najděte množinu řešení $x, y, z \in \mathbb{R}$ soustavy

$$\begin{aligned} \alpha x + \alpha y + \alpha z &= \alpha \\ \alpha x + \alpha\beta y + \alpha\beta^2 z &= \alpha\beta \\ \beta x + \beta\alpha y + \beta\alpha^2 z &= \beta\alpha \end{aligned}$$

8. Najděte množinu všech řešení soustavy LAR v závislosti na parametrech $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Pokud existuje jediné řešení, nemusíte je hledat.

$$\begin{aligned} 2x + \alpha y + z &= 1 \\ (1 + 2\alpha\beta)x + \alpha^2\beta y + \alpha\beta z &= 1 \\ \alpha^2\beta x + \alpha^3\beta y + (2 - \alpha)\beta z &= \beta \end{aligned}$$

9. (cvičení) Určete, pro jaké hodnoty parametrů $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ je soustava řešitelná, případně určete dimenzi množiny řešení.

$$\begin{aligned} \beta^2 x + y + \beta z &= \beta \\ \alpha x - \beta y + z &= \beta^2 \\ \alpha^2 x + y + \beta z &= \alpha \end{aligned}$$

Výsledky: Frobeniova věta

S značí množinu řešení soustavy LAR.

- (a) pro $\alpha \neq 0 \wedge \beta \neq \pm 1 \wedge \beta \neq \alpha^2$ existuje 1 řešení

(b) pro $\alpha = \beta = 0$ je $S = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$

(c) pro $\alpha = \beta = 1$ je $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$

(d) pro $\alpha = 1 \wedge \beta = -1$ je $S = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$

(e) v ostatních případech řešení neexistuje
- (a) pro $\alpha \neq 0 \wedge \beta \neq 0 \wedge \beta \neq -1 \wedge \alpha(\beta - 1) \neq 2\beta$ existuje 1 řešení

(b) pro $\alpha \neq 0 \wedge \beta = 0$ je $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} \\ \frac{1}{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$

(c) v ostatních případech řešení neexistuje
- (a) pro $\beta \neq -\frac{\alpha}{2} \wedge \beta \neq \alpha$ je $S = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha+2\beta} \\ \frac{1}{\alpha+2\beta} \\ \frac{1}{\alpha+2\beta} \end{pmatrix} \right\}$

(b) pro $\beta = \alpha \wedge \beta \neq 0$ je $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda$

(c) v ostatních případech řešení neexistuje
- (a) pro $\alpha \neq \beta \wedge \alpha \neq \gamma \wedge \beta \neq \gamma$ existuje 1 řešení

(b) pro $\alpha = \beta = \gamma$ je $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} -\alpha^2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda$

(c) pro $\alpha = \beta \wedge \alpha \neq \gamma$ je $S = \begin{pmatrix} -\alpha\gamma^2 - \alpha^2\gamma \\ \alpha^2 + \alpha\gamma + \gamma^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} \alpha\gamma \\ -\alpha - \gamma \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$

(d) pro $\alpha = \gamma \wedge \alpha \neq \beta$ nebo $\beta = \gamma \wedge \beta \neq \alpha$ je $S = \begin{pmatrix} -\alpha\beta^2 - \alpha^2\beta \\ \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} \alpha\beta \\ -\alpha - \beta \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$

(e) v ostatních případech řešení neexistuje
- (a) pro $\alpha \neq \beta \wedge \alpha \neq 1 \wedge \beta \neq -\alpha - 1$ existuje 1 řešení

- (b) pro $\alpha \neq -\frac{1}{2} \wedge \beta = -\alpha - 1$ je $S = \left(\begin{array}{c} \frac{\alpha+2}{2\alpha+1} \\ \frac{\alpha-1}{2\alpha+1} \\ 0 \end{array} \right) + \left[\left(\begin{array}{c} -\alpha^2 + 1 \\ -\alpha^2 - \alpha - 1 \\ 2\alpha + 1 \end{array} \right) \right]_\lambda$
- (c) pro $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ je $S = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -2 \end{array} \right) + \left[\left(\begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right) \right]_\lambda$
- (d) v ostatních případech řešení neexistuje
6. (a) pro $\alpha \neq \pm i$ je $S = \left(\begin{array}{c} \frac{1+i\alpha}{1+\alpha^2} \\ \frac{1+i\alpha}{1+\alpha^2} \\ 0 \end{array} \right) + \left[\left(\begin{array}{c} 2i\alpha \\ 1 - \alpha^2 \\ 1 + \alpha^2 \end{array} \right) \right]_\lambda$
- (b) pro $\alpha = i$ je $S = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) + \left[\left(\begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right) \right]_\lambda$
- (c) pro $\alpha = -i$ je $S = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -1 \end{array} \right) + \left[\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right) \right]_\lambda$
- (d) v ostatních případech řešení neexistuje
7. (a) pro $\alpha \neq \beta \wedge \alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 1 \wedge \beta \neq 0 \wedge \beta \neq 1$ je $S = \left\{ \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right) \right\}$
- (b) pro $\alpha = \beta = 0$ je $S = \mathbb{R}^3$
- (c) pro $\alpha = 0 \wedge \beta \neq 0$ je $S = \left[\left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right) \right]_\lambda$
- (d) pro $\alpha = 1 \wedge \beta \neq 1$ je $S = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right) + \left[\left(\begin{array}{c} -\beta \\ \beta + 1 \\ -1 \end{array} \right) \right]_\lambda$
- (e) pro $\alpha = \beta = 1$ je $S = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) + \left[\left(\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right) \right]_\lambda$
- (f) pro $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 1 \wedge \beta = 0$ je $S = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right) + \left[\left(\begin{array}{c} 0 \\ -1 \\ 1 \end{array} \right) \right]_\lambda$
- (g) pro $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 1 \wedge \beta = 1$ je $S = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right) + \left[\left(\begin{array}{c} -\alpha \\ \alpha + 1 \\ -1 \end{array} \right) \right]_\lambda$
- (h) pro $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 1 \wedge \alpha = \beta$ je $S = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right) + \left[\left(\begin{array}{c} -\alpha \\ \alpha + 1 \\ -1 \end{array} \right) \right]_\lambda$
- (i) v ostatních případech řešení neexistuje
8. (a) pro $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 1 \wedge \alpha \neq -2 \wedge \beta \neq 0$ existuje 1 řešení
- (b) pro $\alpha = -2 \wedge \beta = -\frac{1}{8}$ je $S = \left(\begin{array}{c} \frac{3}{4} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{array} \right) + \left[\left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \right) \right]_\lambda$
- (c) pro $\alpha = 1 \wedge \beta = 1$ je $S = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right) + \left[\left(\begin{array}{c} 0 \\ -1 \\ 1 \end{array} \right) \right]_\lambda$

(d) pro $\beta = 0$ je $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\alpha \end{pmatrix}]_\lambda$

(e) v ostatních případech řešení neexistuje

9. (a) pro $\beta \neq \pm i \wedge \alpha \neq \pm \beta$ je $\dim S = 0$

(b) pro $(\beta \neq \pm i \wedge \alpha = \beta)$ nebo $(\beta = i \wedge \alpha = -\frac{1}{3}i)$ nebo $(\beta = -i \wedge \alpha = \frac{1}{3}i)$ je $\dim S = 1$

(c) v ostatních případech je $S = \emptyset$